

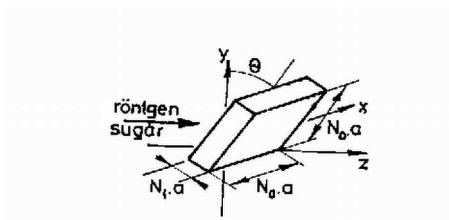
A versenyzőknek három elméleti feladatot kellett megoldaniuk, s ehhez öt óra idő állt rendelkezésükre.

1. feladat. Röntgensugarak elhajlása kristályrácson

Röntgensugarak elhajlását fogjuk vizsgálni egyszerű köbös kristályrácson. Először egy monokromatikus síkhullám elhajlását tanulmányozzuk. A hullám merőlegesen esik egy kétdimenziós rácsra, amely $N_1 \times N_2$ részből áll, ezek távolsága d_1 és d_2 . Az elhajlási képet a rácstól L távolságra levő ernyőn észleljük. Az ernyő párhuzamos a ráccsal, továbbá L sokkal nagyobb, mint $N_1 d_1$ és $N_2 d_2$.

a) Határozd meg az ernyőn látható főmaximumok helyzetét és szélességét! (A szélességen a kérdéses maximumhellyel szomszédos két minimumhely közti távolságot értjük.)

Tekintsünk ezek után egy a ráczállandójú köbös kristályt, melynek mérete $N_0 \cdot a \times N_0 \cdot a \times N_1 \cdot a$, ahol N_1 sokkal kisebb, mint N_0 . A kristály az 1. ábrán látható módon kicsiny θ szöget zár be egy z tengely menti, párhuzamos röntgensugárral. Az elhajlási képet most is a kristálytól messze elhelyezett ernyőn észleljük.

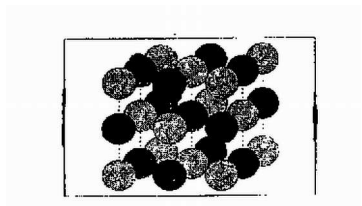


1. ábra

b) Számítsd ki a maximumok helyzetét és szélességét a – kicsinynek tekinthető – θ szög függvényében! Írd le, milyen speciális következménye van annak, hogy N_1 sokkal kisebb, mint N_0 !

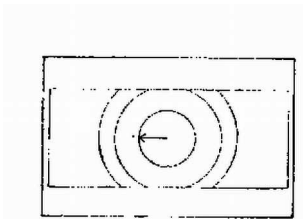
Az elhajlási kép az úgynevezett Bragg-elmélet segítségével is levezethető. Ennek lényege az a feltételezés, hogy a röntgensugarak a kristályrács atomsíkjain tükröződnek. Az elhajlási kép ezeknek a tükröződő sugaraknak egymással történő interferenciájából jön létre.

c) Mutasd meg, hogy a fenti ún. Bragg-reflexió ugyanott adja a maximumok helyét, mint azok a feltételek, melyeket a b) pontban kiszámoltál!



2. ábra

Bizonyos méréseknél az ún. por-módszert alkalmazzák. A röntgensugár nagyon sok, parányi kristályon szóródik. (Természetesen ezeknek a kristályoknak a mérete sokkal nagyobb, mint az a ráczállandó.) Egy kísérletben 0,15 nm hullámhosszú röntgensugarakat szórattunk kálium-kloridon [KCl], amely köbös kristályrácsú (lásd a 2. ábrát). A fotolemezen koncentrikusan sötét körök jelennek meg. A kristály és a fotolemez közötti távolság 0,10 m, a legkisebb kör sugara 0,053 m (lásd a 3. ábrát). A K^+ és a Cl^- ionok lényegében ugyanakkora méretűek, így azonos szórócentrumoknak tekinthetők.



3. ábra

d) Számítsd ki két szomszédos kálium-ion távolságát a kristályrácsban!

Megoldás

a) Tekintsük először az x -irányt. Ha a szomszédos résekből (ezek távolsága d_1) érkező hullámok útkülönbsége:

$$\Delta_1 = n_1 \cdot \lambda,$$

ahol n_1 egész szám, akkor főmaximumhoz jutunk. Ennek helye az ernyőn (x -irányban):

$$x_{n_1} = \frac{n_1 \lambda L}{d_1}.$$

Ekkor a középső rés és az egyik szélső rés közötti útkülönbség:

$$\Delta_{(N_1/2)} = \frac{N_1}{2} n_1 \lambda.$$

Másrészről ha ez az útkülönbség:

$$\Delta_{(N_1/2)} = \frac{N_1}{2} \cdot n_1 \cdot \lambda + \frac{\lambda}{2},$$

akkor a főmaximumot követő első minimumhoz jutunk. Ennek a minimumnak az ernyőn észlelhető elhelyezkedését így adhatjuk meg:

$$x_{n_1} + \Delta x = \frac{\left(\frac{N_1}{2} n_1 \lambda + \frac{\lambda}{2}\right) L}{\frac{N_1}{2} d_1} = \frac{n_1 \lambda L}{d_1} + \frac{\lambda L}{N_1 d_1},$$

amiből

$$\Delta x = \frac{\lambda L}{N_1 d_1}.$$

Ennek megfelelően a főmaximum szélessége:

$$2\Delta x = 2 \frac{\lambda L}{N_1 d_1}.$$

Hasonló módon járhatunk el az y -irányban is, ahol N_2 rés található egymástól d_2 távolságra. A főmaximumok helyzete és szélessége tehát:

$$(x_{n_1}, y_{n_2}) = \left(\frac{n_1 \lambda L}{d_1}, \frac{n_2 \lambda L}{d_2} \right)$$

$$2\Delta x = 2 \frac{\lambda L}{N_1 d_1}; \quad 2\Delta y = 2 \frac{\lambda L}{N_2 d_2}.$$

b) Az x -irányban a sugár a rácsállandójú rácsot „lát”, így ebben az irányban:

$$x_{n_1} = \frac{n_1 \lambda L}{a}; \quad \Delta x = \frac{\lambda L}{N_0 a}.$$

Az y -irányban a sugár $a \cdot \cos \Theta$ effektív rácsállandójú rácsot „lát”. Hasonlóan az előzőekhez, így

$$y_{n_2} = \frac{n_2 \lambda L}{a \cos \Theta}, \quad \Delta y = \frac{\lambda L}{N_0 a \cos \Theta}.$$

A z -irányban a sugár $a \cdot \sin \Theta$ effektív rácsállandójú rácsot „lát”. Ez a következő főmaximum elhelyezkedésekhez és szélességekhez vezet:

$$y'_{n_3} = \frac{n_3 \lambda L}{a \sin \Theta}, \quad \Delta y' = \frac{\lambda L}{N_1 a \sin \Theta}.$$

Ez az elhajlási kép hozzáadódik az előzőhöz. Mivel $\sin \Theta$ nagyon kicsi, csak a nulladrendű kép jelenik meg, amely azonban nagyon széles, hiszen $N_1 \sin \Theta \ll N_0$. Ha tehát egy vékony köbös kristálylapra kicsiny beesési szögben síkhullám esik, az elhajlási kép csaknem azonos lesz a kétdimenziós rács esetével.

c) Bragg-reflexiókor a szomszédos síkok interferenciát eredményező útkülönbsége:

$$\Delta = 2a \sin \Phi \approx 2a\Phi = n\lambda,$$

amiből

$$\frac{x}{L} \approx 2\Phi \approx \frac{n\lambda}{a},$$

tehát

$$x \approx \frac{n\lambda L}{a}.$$

(Itt Φ az elhajlási szög.) Ez a b) alkérdéssel megegyező maximum-feltétel.

d) A szomszédos K^+ -ionok $\sqrt{2} \cdot a$ távolságát a következőképpen kaphatjuk meg:

$$\operatorname{tg}(2\Phi) = \frac{x}{L} = \frac{0,053}{0,1} = 0,53,$$

amiből

$$a = \frac{\lambda}{2 \sin \Phi} \approx \frac{0,15 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 0,24} \approx 0,31 \text{ nm},$$

tehát

$$\overline{K^+ - K^+} \approx \sqrt{2} \cdot 0,31 \text{ nm} \approx 0,44 \text{ nm}.$$

Megjegyzések: A fenti megoldásban a főmaximumok helyzetének meghatározása, a vonalszélességek számítása, valamint a Bragg-elmélet levezetése mind egyszerű megfontolásokon alapulnak, amelyeket azonban a részletesebb számítások alátámasztanak.

A pontosabb elmélet az úgynevezett szórás amplitúdó számításán alapul. (A részletes levezetés sok kézikönyvben megtalálható, lásd például Kittel: *Bevezetés a szilárdtest-fizikába.*) A szórt hullám intenzitása (ez észlelhető) a szórás amplitúdó abszolútérték négyzetével arányos. Például egy N rácspontból álló a rácsállandójú lineáris láncre a szórás amplitúdó négyzete a következő:

$$|\mathcal{A}|^2 = \frac{\sin^2 \left[\frac{1}{2} N (\mathbf{a} \cdot \Delta \mathbf{k}) \right]}{\sin^2 \left[\frac{1}{2} (\mathbf{a} \cdot \Delta \mathbf{k}) \right]}$$

ahol az $(\mathbf{a} \cdot \Delta \mathbf{k})$ kifejezés két vektor skalárszorzata. Az \mathbf{a} rácsvektor két szomszédos rácspontot összekötő vektor, míg a $\Delta \mathbf{k}$ vektor a beeső és a szóródó sugarak közötti különbséget jellemzi. A beeső sugarat jellemezze az úgynevezett \mathbf{k} hullámszámvektor, melynek iránya megegyezik a beeső nyalábbal, míg ugyanígy a szóródó nyalábot jellemezzük a \mathbf{k}' hullámszámvektorral. Mindkét vektor nagysága ugyanakkora: $|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}'| = \frac{2\pi}{\lambda}$. A $\Delta \mathbf{k}$ vektor a fenti két hullámszámvektor különbsége: $\Delta \mathbf{k} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$. Így a szórás amplitúdóban lévő $(\mathbf{a} \cdot \Delta \mathbf{k})$ skalárszorzat a következő módon fejthető ki:

$$(\mathbf{a} \cdot \Delta \mathbf{k}) = \mathbf{a}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) = \frac{2\pi}{\lambda} a (\cos \alpha' - \cos \alpha),$$

ahol α' és α a szóródó és a beeső nyaláboknak az \mathbf{a} vektorral bezárt szögét jelentik. Az $|\mathcal{A}|^2$ függvény matematikai viselkedése mutatja meg a diffrakciós maximumok helyét, melynek feltétele, hogy $(\mathbf{a} \cdot \Delta \mathbf{k}) = 2\pi n$ legyen, ahol n egész szám. Merőleges beesés esetén $\alpha = \frac{\pi}{2}$, tehát $\cos \alpha = 0$, vagyis

$$2\pi n = \frac{2\pi}{\lambda} a \cos \alpha',$$

továbbá geometriai megfontolásokból:

$$\cos \alpha' = \frac{n\lambda}{a} \approx \frac{x}{L},$$

amiből

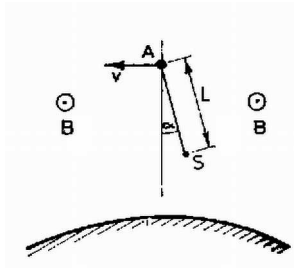
$$x = \frac{n\lambda L}{a},$$

tehát megkaptuk a főmaximumok ismert helyét.

A szórás amplitúdó első minimumhelyét úgy kereshetjük meg, hogy kissé megváltoztatjuk $\Delta \mathbf{k}$ -t és definiálunk egy olyan ε számot az $(\mathbf{a} \cdot \Delta \mathbf{k}) = 2\pi n + \varepsilon$ kifejezéssel, hogy ε adja meg a $\sin \left[\frac{1}{2} N (\mathbf{a} \cdot \Delta \mathbf{k}) \right]$ kifejezés első nullahelyét. Könnyen megmutatható, hogy $\varepsilon = \frac{2\pi}{N}$, tehát az elhajlási maximum szélessége arányos $1/N$ -nel. Ezzel visszakaptuk a hivatalos megoldás vonalszélességi eredményét. A fenti tárgyalás háromdimenziós kristályokra is érvényes, így belátható, hogy mind a köbös kristály elhajlási képe, mind a Bragg-reflexiók elmélet levezethető a szórás amplitúdó segítségével.

2. feladat. Elektromos kísérletek a Föld magnetoszférájában

1991 májusában állítják Föld körüli pályára az Atlantis űrrepülőgépet. Tegyük fel, hogy a pályája kör alakú lesz, amely a Föld egyenlítői síkjában fekszik. Egy meghatározott időpontban az űrrepülőgép kibocsát egy S szondát, s ez egy L hosszúságú elektromosan vezető rúddal kapcsolódik az Atlantishoz. Tételezzük fel, hogy a rúd merev, elhanyagolható tömegű, továbbá elektromosan szigetelő burkolat veszi körül. Mindenféle súrlódást elhanyagolunk.



4. ábra

Legyen α a rúd és az Atlantist a Föld középpontjával összekötő egyenes által bezárt szög (lásd a 4. ábrát)! Az S szonda szintén az Egyenlítő síkjában helyezkedik el. Tegyük fel, hogy a szonda tömege sokkal kisebb, mint az Atlantisé, továbbá L sokkal kisebb, mint a pálya sugara.

a₁) Határozd meg, hogy milyen α érték(ek)nél marad a Földhöz képest változatlan az Atlantis és a szonda elhelyezkedése, vagyis milyen α érték(ek)nél marad α időben állandó?

a₂) Vizsgáld meg minden esetben az egyensúly stabilitását!

Tegyük fel, hogy egy adott időpillanatban a rudat kis szöggel kitérítjük stabil egyensúlyi helyzetéből. A szonda ingaszerűen lengésbe jön.

b) Fejezd ki a szonda lengésidejét a rendszer földkörüli keringési idejének segítségével!

A 4. ábrán a Föld mágneses tere merőleges a rajz síkjára és iránya felénk mutat. A rúd pályamenti sebessége miatt a végpontjai között feszültség alakul ki. A környezet (a magnetoszféra) ritka ionizált gáz, nagyon jó elektromos vezetőképességgel. Az ionizált gázzal való elektromos érintkezést az Atlantison levő A és a szondán levő S elektródák biztosítják. A mozgás következtében I erősségű áram folyik a rúdon keresztül.

c₁) Milyen irányú áram folyik a rúdban? (Legyen $\alpha = 0$!)

Adatok:	– a keringési idő	$T = 5,4 \cdot 10^3$ s,
	– a rúd hossza	$L = 2,0 \cdot 10^4$ m,
	– a Föld mágneses indukciójának erőssége	$B = 5,0 \cdot 10^{-5}$ Wb/m ²
	– a szonda környezetében	
	– az Atlantis tömege	$m = 1,0 \cdot 10^5$ kg.

Ezek után az űrrepülőgépben levő áramforrást is bekötjük az áramkörbe, s ily módon 0,1 A erősségű eredő egyenáram folyik az eddigivel ellentétes irányban.

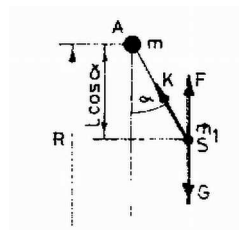
c₂) Mennyi idő szükséges ahhoz, hogy a fenti áram hatására a pályasugár fokozatosan 10 m-rel megváltozzék? (Tegyük fel, hogy α mindvégig nulla marad! Hanyagoljuk el a magnetoszférában folyó áramok valamennyi hatását!) Csökken vagy pedig növekszik a pályasugár?

Megoldás. Az m_F tömegű Föld körül R sugarú körpályán egyenletes Ω szögsebességgel keringő űrrepülőgép mozgásegyenlete:

$$mR\Omega^2 = f \cdot \frac{m \cdot m_F}{R^2},$$

ahonnan

$$\Omega^2 = \frac{f \cdot m_F}{R^3}.$$



5. ábra

Vizsgáljuk meg a szondára ható erőket az Atlantis űrrepülőgéppel együttmozgó, forgó koordinátarendszerből nézve. Az 5. ábrán látható helyzetben a gravitációs erő nagysága

$$G = \frac{f \cdot m_1 \cdot m_F}{(R - L \cdot \cos \alpha)^2},$$

a „centrifugális erő”

$$F = m_1 \cdot (R - L \cos \alpha) \cdot \Omega^2,$$

ezen kívül fellép még valamekkora K nagyságú „rúderő”, valamint mozgó szonda esetében a Coriolis-erő; ez utóbbi a további vizsgálódás során nem játszik szerepet. Tekintettel arra, hogy a rúd hossza sokkal kisebb, mint a Föld sugara, \mathbf{G} és \mathbf{F} irányának változásától eltekinthetünk.

A szonda egyensúlyának feltétele az, hogy \mathbf{G} és \mathbf{F} eredőjének ne legyen \mathbf{K} -ra merőleges komponense:

$$(G - F) \sin \alpha = 0.$$

A fenti egyenletnek $\alpha_1 = 0$ és $\alpha_2 = 180^\circ$ nyilván megoldása, a zárójelben álló mennyiség pedig $\alpha_3 = 90^\circ$ -nál és $\alpha_4 = 270^\circ$ -nál válik nullává.

A szondának tehát négy egyensúlyi helyzete van. Könnyen belátható, hogy ezek közül az „alsó” és a „felső” helyzet stabil, míg a két „oldalsó” helyzet instabil egyensúlynak felel meg. Ha például az α_3 helyzetből egy kicsit kitérítjük a szondát lefelé, akkor a gravitációs erő nőni, a centrifugális erő pedig csökkenni kezd, tehát $\mathbf{G} - \mathbf{F}$ lefelé mutat, s így egyre jobban el akarja távolítani a szondát az egyensúlyi helyzetétől. Ugyanez érvényes az α_4 -nek megfelelő helyzetre is. Mivel az alsó oldalon csak az $\alpha_1 = 0$, a felső oldalon pedig az $\alpha_2 = 180^\circ$ -os helyzetekben valósul meg az erőegyensúly, ezek nyilván stabilak kell legyenek.

Az alsó egyensúlyi helyzet közelében (tehát $\cos \alpha \approx 1$ esetén) \mathbf{G} és \mathbf{F} eredőjének nagysága:

$$\begin{aligned} G - F &= \frac{f \cdot m_1 \cdot m_F}{(R - L \cos \alpha)^2} - m_1 \cdot (R - L \cos \alpha) \cdot \Omega^2 \approx \\ &\approx f \cdot m_1 \cdot m_F \cdot \left[\frac{1}{(R - L)^2} - \frac{R - L}{R^3} \right] = \frac{f \cdot m_1 m_F}{R^2} \left[\left(1 - \frac{L}{R}\right)^{-2} - \left(1 - \frac{L}{R}\right) \right] \approx \\ &\approx \frac{3f \cdot m_1 m_F \cdot L}{R^3} = 3m_1 \cdot L \cdot \Omega^2. \end{aligned}$$

(Az utolsó előtti lépésnél kihasználtuk, hogy $L \ll R$.) Látható, hogy a szondára a rúderőn kívül egy a tömegével arányos nagyságú, függőleges irányú erő hat, éppen olyan, amilyen egy $g^* = 3L\Omega^2$ gravitációs gyorsulású homogén nehézségi erőterben hatna. Ez utóbbiban viszont egy L hosszúságú matematikai inga lengésideje:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g^*}} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{3} \left(\frac{T_0}{2\pi}\right)^2} = \frac{T_0}{\sqrt{3}},$$

ahol T_0 az Atlantis keringési ideje.

A Föld mágneses tere a mozgó vezetőben feszültséget indukál, s ennek hatására a rúdban a szondától az űrrepülőgép felé áram folyik. Ha az áramerősséget „erőszakkal” ellentétesirányú, I nagyságúra változtatjuk, akkor a mágneses mező

$$F_B = I \cdot B \cdot L = 0,1 \text{ N}$$

nagyságú erővel „gyorsítja” a rendszert. Az idézőjel arra figyelmeztet, hogy a gyorsítás sebesség nagyságának nem a növekedését, hanem éppen ellenkezőleg, a csökkenését eredményezi (asztronautikai paradoxon).

A körpályán, vagy ahhoz közeli pályán keringő űrrepülőgép összenergiája:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - f \cdot \frac{m \cdot m_F}{R} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{f \cdot m \cdot m_F}{R}.$$

Ez az energia Δt ideig ható F nagyságú erő következtében $\Delta E = F \cdot v \cdot \Delta t$ értékkel változik meg, feltéve, hogy \mathbf{F} és \mathbf{v} azonos irányú vektorok; esetünkben ez teljesül. Másrészt

$$2 \cdot \Delta E = -f \cdot m \cdot m_F \left(\frac{1}{R + \Delta R} - \frac{1}{R} \right) \approx f \cdot \frac{m \cdot m_F \cdot \Delta R}{R^2},$$

ahol ΔR a pálya sugarának megváltozása. A fenti összefüggések és a mozgásegyenlet felhasználásával végül az űrrepülőgép megemeléséhez szükséges időre

$$\Delta t = \frac{m \cdot \Delta R}{F_B \cdot T} \cdot \pi \approx 5,8 \cdot 10^3 \text{ s adódik.}$$

3. feladat. Forgó neutroncsillag

A „milliszekundomos pulzár” olyan kozmikus sugárforrás, amely nagyon rövid impulzusokat bocsát ki néhány ms-os periódusidővel. Ez a sugárzás a rádióhullámok tartományába esik; megfelelő vevőkészülékkel az egyes impulzusokat külön-külön észlelhetjük, s ily módon a periódusidőt nagy pontossággal meghatározhatjuk.

Ezek a rádióimpulzusok egy különleges csillag, az ún. neutroncsillag felszínéről származnak. Ezek a csillagok nagyon tömörek: tömegük a Nap tömegének nagyságrendjébe esik, sugaruk azonban csak néhány száz kilométer. Nagyon

gyorsan forognak. A gyors forgás következtében a neutroncsillag kismértékben belapul. Tegyük fel, hogy a felületének a forgástengelyre illeszkedő síkmetszete olyan ellipszis, melynek tengelyei csaknem egyenlő hosszúságúak.

Legyen r_p a pólus felé mutató sugár, r_e pedig az egyenlítői sugár, és definiáljuk a „lapultságot” a következő módon:

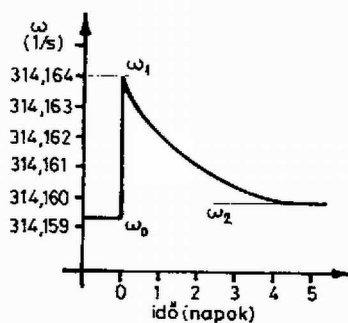
$$\varepsilon = (r_e - r_p)/r_p.$$

Legyen a neutroncsillag	tömege	$2,0 \cdot 10^{30}$ kg,
	átlagos sugara	$1,0 \cdot 10^4$ m,
	forgási periódusideje	$2,0 \cdot 10^{-2}$ s.

a) Számítsd ki a neutroncsillag lapultságát!

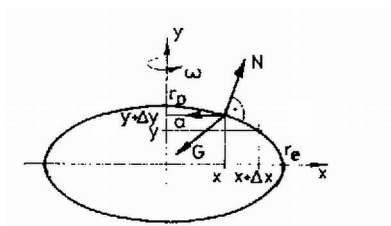
(A gravitációs állandó $6,67 \cdot 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$.)

Hosszú idő (néhány év) alatt az energiavesztés következtében a csillag forgása lelassul, s ez a lapultság csökkenésével jár együtt. A csillag felszínén azonban szilárd kéreg található, s ez a csillag folyékony belső részén úszik. A szilárd kéreg megakadályozza az egyensúlyi alak folytonos kialakulását. Ehelyett „csillagrendések” játszódnak le, amelyek gyors változásokat okozva módosítják a kéreg alakját az egyensúlyi forma irányába. Ilyen csillagrendések alatt és után a megfigyelhető szögsebesség a 6. ábrán látható módon változik.



6. ábra

b) Az ábra adatai alapján számítsd ki a folyékony belső rész sugarát! Tekintsd a köpeny és a belső rész sűrűségét azonosnak! (Hanyagold el a belső rész alakváltozását!)



7. ábra

Megoldás. A 7. ábrán egy forgó neutroncsillag ellipszis alakú keresztmetszete látható, szándékosan eltorzított arányokkal. Az ellipszis egyenlete

$$\frac{x^2}{r_e^2} + \frac{y^2}{r_p^2} = 1.$$

Írjuk fel ezt az egyenletet az (x, y) és a hozzá közeli $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ koordinátájú pontra, majd vonjuk ki a két egyenletet egymásból. A kicsiny Δx és Δy mennyiségek négyzetét elhanyagolva az

$$\frac{x \cdot \Delta x}{r_e^2} + \frac{y \cdot \Delta y}{r_p^2} = 0$$

összefüggést kapjuk.

A csillag felszínén levő m tömegű anyagdarabkára a \mathbf{G} gravitációs erő, valamint a közvetlen közelében levő anyag által kifejtett \mathbf{N} „nyomóerő” hat. Mivel a csillag csak egy nagyon kicsit lapult, feltételezhetjük, hogy \mathbf{G} a csillag középpontja felé mutat és a nagysága a felszín minden pontjában jó közelítéssel ugyanakkora: $G = f \cdot m \cdot M/r^2$, ahol M a csillag tömege, r pedig az átlagos sugara.

Az \mathbf{N} vektor iránya könnyen deformálódó (például folyékony halmazállapotú) testeknél merőleges kell legyen a felszínre (pontosabban fogalmazva a felület érintősíkjára), vagyis a 7. ábra jelöléseivel

$$\frac{N_x}{N_y} = -\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{r_p^2}{r_e^2} \cdot \frac{x}{y}.$$

A \mathbf{G} és az \mathbf{N} erő hatására a vizsgált anyagdarabka $a = m \cdot x \cdot \omega^2$ centripetális gyorsulású körmozgást végez az y -tengely körül. A mozgásegyenlet megfelelő komponensei:

$$\begin{aligned} -G \cdot \frac{x}{r} + N_x &= -m \cdot x \cdot \omega^2, \\ -G \cdot \frac{y}{r} + N_y &= 0. \end{aligned}$$

A fenti egyenletekből az N_x/N_y arányt kifejezve, s azt a korábbi számolás eredményével összevetve

$$\frac{\frac{G}{r}x - m \cdot \omega^2 \cdot x}{\frac{G}{r} \cdot y} = \left(\frac{r_p}{r_e}\right)^2 \cdot \frac{x}{y}$$

adódik. Ez az összefüggés a felület minden pontjában teljesül, ha fennáll, hogy

$$\left(\frac{r_p}{r_e}\right)^2 = 1 - \frac{m \cdot r \cdot \omega^2}{G} = 1 - \frac{r^3 \omega^2}{f \cdot M} \approx \left(1 - \frac{r^3 \cdot \omega^2}{2 \cdot f \cdot M}\right)^2$$

ahonnan

$$\varepsilon = 1 - \frac{r_p}{r_e} = \frac{r^3 \cdot \omega^2}{2 \cdot f \cdot M} \approx 3,7 \cdot 10^{-4}.$$

A csillagregés következtében a kéreg Θ_k tehetetlenségi nyomatéka hirtelen lecsökken valamekkora $\Delta\Theta_k$ értékkel. Nagyon rövid idő alatt a folyékony belső rész nem képes számottevő perdületet átadni a kéregnek, így a kéreg szögsebességének (a perdületmegmaradás törvénye értelmében) meg kell változnia:

$$\Theta_k \cdot \omega_0 = (\Theta_k - \Delta\Theta_k) \cdot \omega_1,$$

ahonnan

$$\Delta\Theta_k = \Theta_k \cdot \frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_1}.$$

Elegendő hosszú idő után a folyékony belső rész és a kéreg szögsebessége kiegyenlítődik. Mivel a csillag egésze zárt rendszernek tekinthető, a perdületmegmaradás törvénye most is alkalmazható. A folyékony belső rész tehetetlenségi nyomatékát Θ_f -fel jelölve

$$(\Theta_f + \Theta_k)\omega_0 = (\Theta_f + \Theta_k - \Delta\Theta_k)\omega_2,$$

s innen

$$\Delta\Theta_k = (\Theta_f + \Theta_k) \frac{\omega_2 - \omega_0}{\omega_2}.$$

A $\Delta\Theta_k$ -ra kapott kétféle kifejezés összevetéséből, valamint az állandó sűrűség esetén fennálló $\Theta \sim M \cdot r^2 \sim r^5$ arányosságból végül azt kapjuk, hogy

$$\frac{r_f}{r} = \sqrt[5]{\frac{\Theta_f}{\Theta_k + \Theta_f}} = \sqrt[5]{1 - \frac{(\omega_2 - \omega_0)\omega_1}{(\omega_1 - \omega_0)\omega_2}} \approx 0,98.$$

Kísérleti forduló

A versenyzőknek két kísérleti feladatot kellett megoldaniuk, kétszer 2,5 óra alatt. A továbbiakban vázlatosan ismertetjük ezek lényegét, illetve lehetséges megoldásukat.

4. feladat. Egy LED hatásfokának meghatározása

Ebben a kísérletben a diákok két modern félvezető eszközzel, fénykibocsátó diódával (LED), illetve fotodiódával dolgoztak. Három mérési feladatot kaptak:

- kalibrálniuk kellett a fotodiódát,
- meg kellett határozniuk, mekkora áram esetén maximális a LED hatásfoka.
- meg kellett adniuk a LED maximális hatásfokának számértékét.

A feladat megoldásához elméleti és gyakorlati útmutatást kaptak. A rövid elméleti leírás a következő volt:

Egy LED-ben az elektromos energia egy része elektronok gerjesztését szolgálja, melyek így magasabb energiaszintre kerülnek. Amikor egy ilyen gerjesztett elektron alacsonyabb energiaszintre kerül vissza, E_{foton} energiájú fotont bocsát ki, ahol

$$E_{\text{foton}} = h \cdot c / \lambda.$$

Itt h a Planck-állandó, c a fénysebesség, λ a kibocsátott fény hullámhossza.

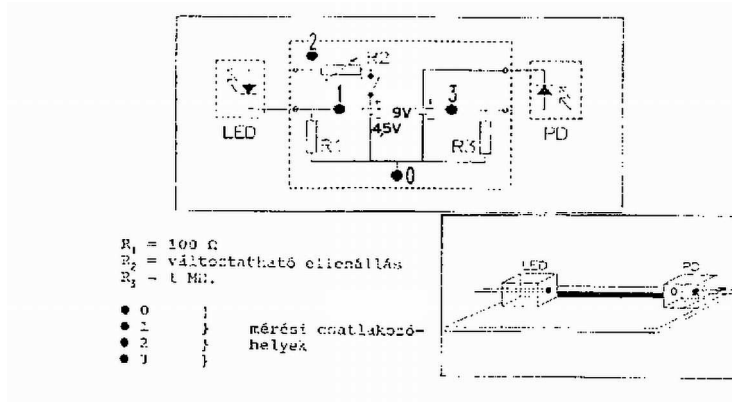
A LED hatásfokát a Φ kisugárzott teljesítmény és a felhasznált P_{LED} elektromos teljesítmény aránya határozza meg a következő módon:

$$\eta = \Phi/P_{\text{LED}}.$$

A fotodiódában a sugárzási energia elektromos energiává alakul át. Ha fény jut a fotodióda érzékelő felületére, néhány (de nem az összes) foton kiszabadít valahány elektront a kristály anyagából (de nem mindegyiket). A másodpercenként érkező fotonok N_f számának és a másodpercenként kilépő elektronok N_e számának arányát kvantumhatásfoknak (q_f) nevezzük:

$$q_f = N_e/N_f.$$

A gyakorlati útmutatásban megadták a fotodióda kvantum-hatásfokát ($q_f = 0,88$), a fotodióda érzékelőfelületét ($2,75 \times 2,75 \text{ mm}^2$), a LED által kibocsátott fény hullámhosszát ($\lambda = 635 \text{ nm}$), illetve a szükséges fizikai állandók értékét. Közltek annak az áramköri panelnek a kapcsolási rajzát, amely biztosította a LED és a fotodióda (PD) működését (8. ábra). Megadták az R_1 és R_3 ellenállás értékét, így a diákok a rendelkezésükre álló multiméter segítségével, melyet csak feszültségmérő üzemmódban használhattak, meghatározhatták a LED-re és a fotodiódára eső feszültséget, illetve a rajtuk átfolyó áramot. A fotodiódát és a LED-et tartalmazó két dobozt szabadon mozgathatták egy milliméterpapírral borított lapon. Megtudhatták végül még azt is, hogy a fotodióda kalibrálásakor feladatuk az, hogy kísérletileg igazolják a fotodiódán átfolyó áram, illetve a ráeső fényintenzitás közötti kapcsolat linearitását.



8. ábra

A megoldás az intenzitás és a távolság közötti ismert összefüggés ($I \sim 1/x^2$) használatán alapszik, ugyanis állandó LED teljesítmény mellett meg kell mérni a fotodiódán folyó áramot, majd ábrázolni az $1\sqrt{I}$ értéket x függvényében. A versenyzőknek észre kellett (volna) venniük, hogy a helyes áramértékhez a háttérvilágításból származó fényt is számításba kell venni. A kapott egyenes igazolja a kérdéses linearitást. Az egyenes nem megy át az origón, a mérések szerint az x -tengelyt körülbelül a -3 cm -nél metszi, ami megmutatja, hogy a fotodióda érzékelő felülete a dobozon lévő nyílás mögött hozzávetőlegesen 3 cm -re helyezkedett el.

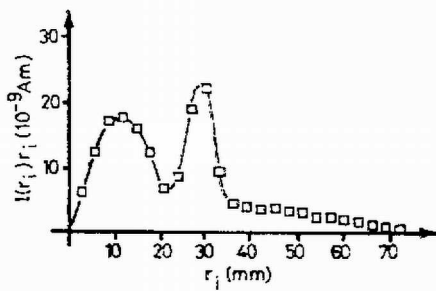
A LED hatásfoka az eddigiek alapján arányos a fotodiódán átfolyó (háttérrel korrigált) I áram és a LED-re eső teljesítmény hányadosával ($\eta \sim I/P_{\text{LED}}$). A megfelelő áram- és feszültség értékek meghatározásakor figyelembe kellett (volna) venni a multiméter megadott belső ellenállását is. Az $I/P_{\text{LED}} - I_{\text{LED}}$ grafikon alapján megállapítható volt, hogy a maximális hatásfok $I_{\text{LED}} = 6 \text{ mA}$ áramhoz tartozott, kisebb áramok esetén a hatásfok rohamosan, míg nagyobb áramoknál csak kis mértékben, fokozatosan csökkent.

A LED maximális hatásfokának számszerű meghatározásához vizsgálni kellett a kibocsátott hengerszimmetrikus fénykúp intenzitásviszonyait. A fotodióda d^2 érzékelő felületével megadhatjuk a szimmetriatengelytől r_i távolságra az ottani $\Phi(r_i)$ fényintenzitást az $I(r_i)$ fotodióda áram segítségével, majd összegezhettük a kapott gyűrűk intenzitásait a teljes Φ kisugárzott teljesítmény meghatározása céljából a következő módon:

$$I(r_i) = N_e e = N_f \cdot q_f \cdot e = \frac{\Phi(r_i)}{h \cdot \nu} \cdot q_f \cdot e,$$

$$\Phi = \sum_i \Phi(r_i) \frac{2\pi r_i d}{d^2} = \frac{2\pi}{d} \sum_i \Phi(r_i) r_i = \frac{2\pi h \cdot \nu}{d \cdot q_f e} \sum_i I(r_i) r_i$$

A fénykúp intenzitásviszonyait jellemző $I(r_i) \cdot r_i$ függvény grafikonját a 9. ábrán láthatjuk. Az összegzés elvégzése után a LED hatásfoka az $\eta = \Phi/P_{\text{LED}}$ definíció alapján körülbelül egy ezreléknek adódott.

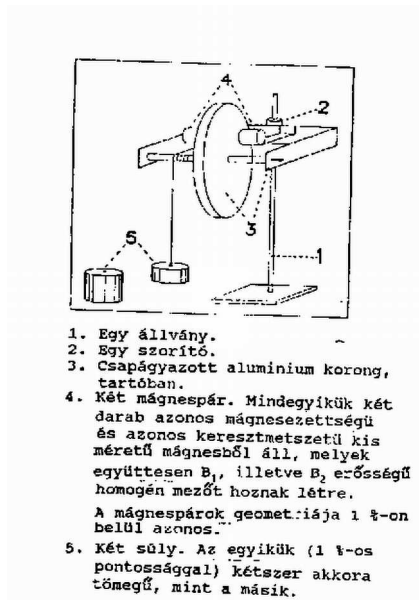


9. ábra

5. feladat. Két különböző mágnes mágneses térerősségarányának meghatározása

A versenyzőknek egy tűcsapágyakkal ellátott alumínium korong mozgását kellett vizsgálniuk. A korong mozgását a tartószerkezethez rögzíthető két mágnespár valamelyike fékezte a fellépő örvényáramok következtében (10. ábra). Az erről szóló rövid elméleti bevezető így hangzott:

Ha egy vezető mágneses mezőben mozog, benne áramok indukálódnak, ezek az ún. örvényáramok. A mágneses mező és az indukált áramok kölcsönhatása következtében a mozgó vezetőre fékező erő hat. Így egy alumínium korong, amely egy állandó mágnes közelében mozog, fékező erőt érez.



10. ábra

A korong mozgását a tengelyére csévelt fonálon csüngő súly biztosította. A diákoknak két súly állt rendelkezésükre, melyek tömegaránya 1 : 2 volt. Sokan nem vették észre, hogy ez háromféle mérést tesz lehetővé, hiszen a két súly együttesen is használható. A súly elengedése után (amint ez a gyakorlati útmutatásban szerepel) a korong egyre gyorsabb forgásba jön, majd szögsebessége egy állandó értéket vesz fel. A végsebesség – többek között – a mágnespárok B_1 és B_2 térerősségétől függ. A versenyzőknek a következő mérési feladatokat kellett elvégezniük:

– Tervezz olyan mérést, amelyben a mágnespárok B_1 és B_2 térerősségeinek aránya minél pontosabban meghatározható!

- Add meg – röviden – annak elméleti levezetését, hogyan kapható meg a mérési adatokból a keresett arány!
- Végezd el a mérést és határozd meg az arányt!
- Végezz hibaszámítást!

A megoldáshoz a következő elméleti megfontolásra volt szükség: A korong egyenletes mozgásakor a fonálon lévő súlyra ható nehézségi erőből származó forgatónyomaték (mgr) egyensúlyt tart az örvényáramokból adódó M_B , illetve a súrlódásból származó M_S fékező nyomatékok összegével:

$$mgr = M_B + M_S.$$

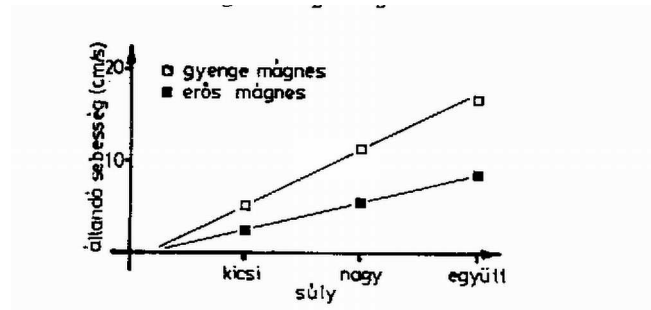
Jogos és szokásos feltenni, hogy M_S állandó, de nem elhanyagolható. (A magyar versenyzők többsége sajnos a súrlódást nem vette figyelembe.) Könnyű megmondani, hogy az örvényáramok nagysága B -vel és a szögsebességgel arányos, így a Lorentz-erő B négyzetével és a szögsebességgel arányos, vagyis egy C állandó segítségével a mágneses fékező nyomaték

$M_B = CB^2\omega$ alakban adható meg. A fentiek alapján, $\omega = v_e/r$ figyelembevételével, az egyenletesen mozgó súly v_e sebessége:

$$v_e = \frac{gr^2}{CB^2} \left(m - \frac{M_S}{gr} \right),$$

vagyis az állandó sebesség m lineáris függvénye.

Kísérletileg először is megfelelő időmérésekkel igazolni kellett, hogy a korong mozgása egyenletes, illetve meghatározott út után a súlyok már állandó sebességgel mozognak. Meg kellett határozni ezeket a sebességeket a háromféle lehetséges terhelésnél, mindkét mágnes esetén. A végsebesség–súly grafikonok a 11. ábrán láthatók. A vízszintes tengelymetszetből az M_S súrlódási fékező nyomatékra következtethetünk, míg a két egyenes meredeksége négyzetgyökének az aránya közvetlenül megadja a mágneses térerősségek arányát. Megfelelő hibaszámítás után a végeredmény: $B_1/B_2 = 0,69 \pm 0,03$.



11. ábra