A feladatok alábbi megoldásait az olimpián részt ett versenyzők és Pataki János készítették.

1. *Egy adott kör AB, CD húrjai a kör belsejében lévő E pontban metszik egymást. Legyen M az EB szakasz egy belső pontja. A D, E, M pontokon átmenő körhöz E-ben húzott érintő messe a BC, ill. AC egyeneseket rendre az F, ill. a G pontban. Ha $\dfrac{AM}{AB}=t$, fejezzük ki az $\dfrac{EG}{EF}$ hányadost t segítségével.*

Megoldás. Azt a pontot, ahol MD másodszor metszi a kört, jelöljük X-szel. Továbbá legyen $ADC\sphericalangle=\gamma$, $CDX\sphericalangle=\alpha$, $XDB\sphericalangle=\beta$. Mivel szintén az AC ívhez tartozik, $ABC\sphericalangle=\gamma$. Az FG egyenes a DEM háromszög körülírt körének E-beli érintője, e kis körben az FEM szög az EM húrhoz tartozó érintő szárú kerületi szög, így $FEM\sphericalangle=EDM\sphericalangle=\alpha$. Ennek csúcsszögére: $GEA\sphericalangle=\alpha$. Ezentúl csak az $ABCD$ körülírt körére fogunk hivatkozni „kör” néven. E kör sugarát $\dfrac{1}{2}$-nek választva, és tetszőleges L_1, L_2, L_3 köri ponthármasra az általános szinusztételt felírva:

$$L_1L_3=(\sin L_1L_2L_3\sphericalangle)\cdot 2R=\sin L_1L_2L_3\sphericalangle. \tag{$*$}$$

Az AEG háromszögben a szinusztételt felírva:

$$\frac{EG}{\sin GAE\sphericalangle}=\frac{AE}{\sin AGE\sphericalangle}. \tag{$**$}$$

Itt két észrevételt teszünk: mivel $GAE\sphericalangle+EAC\sphericalangle=180^\circ$, ezért $\sin GAE\sphericalangle=\sin EAC\sphericalangle$. Másrészt CB feletti szögek kerületi szögek lévén $\alpha+\beta=CDB\sphericalangle=CAB\sphericalangle$ és $CAB\sphericalangle$ az AEG háromszög külső szöge, így $\alpha+\beta=CAB\sphericalangle=AGE\sphericalangle+AEG\sphericalangle$, tehát $AEG\sphericalangle=\alpha$ szerint $AGE\sphericalangle=\beta=XDB\sphericalangle$.

A $(*)$ és $(**)$ állításokból:

$$EG/CB=AE/XB. \tag{1}$$

Vegyük észre, hogy az EFB háromszögben az E csúcsnál levő szög α, a B-nél levő γ, ezért az F csúcsnál levő szög $180^\circ-\alpha-\gamma$, $\sin EFB\sphericalangle=\sin(\alpha+\gamma)=AX$. Az EFB háromszögben a szinusztétellel: $\dfrac{EF}{\sin\gamma}=\dfrac{EB}{\sin(\alpha+\gamma)}$, így $(*)$ szerint:

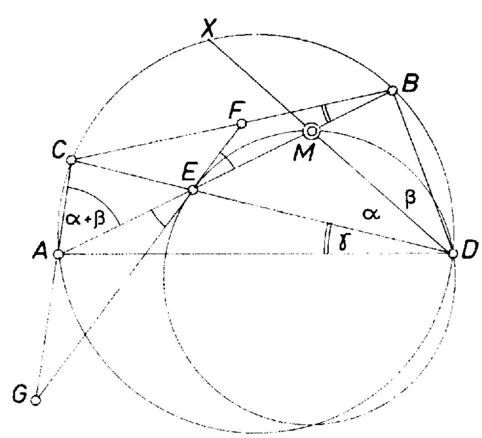
$$EF/AC=EB/AX. \tag{2}$$

(1)-et (2)-vel elosztva:

$$\frac{EG}{EF}=\frac{AE\cdot CB\cdot AX}{EB\cdot AC\cdot XB}. \tag{3}$$

Lemma: Egy $ACBD$ konvex húrnégy szög AB és CD átlóinak metszéspontja E. Ekkor:

$$CB\cdot AE\cdot BD=AC\cdot EB\cdot AD.$$



Bizonyítás: Az ADE háromszögben a szinusztételből:

$$AE/\sin ADE\sphericalangle=AD/\sin AED\sphericalangle,$$

azaz $(*)$ szerint

$$AE/AC=AD/\sin AED\sphericalangle. \tag{L_1}$$

Az EBC háromszögben hasonlóan

$$EB/\sin BCE\sphericalangle = CB/\sin CEB\sphericalangle = CB/\sin AED\sphericalangle,$$

$$EB/BD = CB/\sin AED\sphericalangle. \tag{L$_2$}$$

Az (L_2) egyenletet az (L_1) egyenlettel elosztva és rendezve a bizonyítandó állítást kapjuk.

Lemmánkat az $ACBD$ és $AXBD$ négyszögekre alkalmazva:

$$CB \cdot AE \cdot BD = AC \cdot EB \cdot AD,$$
$$XB \cdot AM \cdot BD = AX \cdot MB \cdot AD.$$

A második egyenletet az elsővel elosztva:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AE \cdot CB \cdot AX}{XB \cdot EB \cdot AC},$$

amelyet (3)-mal összevetve:

$$\frac{EG}{EF} = \frac{AM}{MB} = \frac{AM}{AB - AM} = \frac{t}{1-t}.$$

*M*egjegyzés. A feladat elolvasása és az ábra felrajzolása után mindjárt az a benyomásom támadt, hogy itt olyan sok szép egyenlő szög van, hogy elképzelhetetlen, hogy a megoldást ne lehetne valahogyan „kiszenvedni”. Sajnos, elegáns megoldást nem találván, tényleg ezt kellett tennem. Így versenydolgozatomban a szinusztételt 8 háromszögre alkalmaztam, majd ezek „cseles” összeszorzásával rengeteg tag kiesett és a bizonyítandó állítást kaptam. Az itt közölt megoldásbeli lemmát Pataki János javaslatára használom fel, ez a megoldást jóval áttekinthetőbbé teszi (azért a háttérben ugyanazok a szinusztételek vannak).

Kondacs Attila

2. *Legyen $n \geq 3$, és tekintsünk egy E halmazt, amely egy kör kerületén lévő $2n-1$ darab különböző pontból áll. Tegyük fel, hogy ezen pontok közül pontosan k darabot feketére színezünk. Egy ilyen színezést „jó”-nak nevezünk, ha található két olyan fekete pont, hogy az általuk meghatározott két körív belseje pontosan n darab E-beli pontot tartalmaz. Határozzuk meg a legkisebb olyan k értéket, amelyre igaz, hogy E bármely k pontját színezzük is feketére, a színezés „jó”.*

Megoldás. Kétségkívül ez a feladat volt az első versenynap legkönnyebb feladata, főleg azok számára, akik nem szeretik a geometriát. Ugyanis a megoldás folyamán csupa „természetes” ötletet kell csak felhasználni, tulajdonképpen józan ész elegendő hozzá.

Legyenek a pontok nevei rendre A_1, A_2, ..., A_{2n-1}. (Ha valamilyen A_i-t említünk, amelyre $i \geq 2n$, vagy $i \leq 0$, akkor az i modulo $(2n-1)$ értendő.)

Könnyen kialakulhat az a sejtésünk, hogy n-től függően $n-1$ vagy n a megfelelő k.

Próbáljunk „rossz” színezést találni. Vizsgáljuk a következő sorozatot

$$A_{n-2}; A_{2(n-2)}; A_{3(n-2)}; \ldots; A_{i(n-2)}, \tag{$*$}$$

amelyre teljesüljön, hogy $A_{(i+1)(n-2)}$ már előfordul a sorozatban. Ez az $A_{(i+1)(n-2)}$ pont csak az A_{n-2} lehet, hisz minden ponttól két pont van $n-2$ távolságnyira, s a többi pontnál ezek a szomszédok. Így

$$(i+1)(n-2) \equiv n-2 \pmod{(2n-1)},$$

vagyis

$$(i+1)(n-2) = n-2 + a(2n-1),$$

(ahol a megfelelő egész szám), így

$$i(n-2) = a(2n-1). \tag{1}$$

Ha $i = 2n-1$, akkor a sorozatunk az összes pontot tartalmazza. Közülük n darabot kiválasztva lesz köztük szomszédos (A_{n-2} és $A_{i(n-2)}$ szomszédosnak tekintendő), hiszen különben $A_{j(n-2)}$ kiválasztása esetén $A_{(j+1)(n-2)}$ nem választható ki, s az egyértelmű hozzárendelés miatt n pontot kiválasztva n pontot zárunk ki, ami összesen már több, mint $2n-1$. Nyilván $n-1$ pont kiválasztható, ilyen pl. az $A_{2(n-2)}; A_{4(n-2)}; \ldots; A_{(2n-2)(n-2)}$. Tehát ha $i = 2n-1$, akkor $k = n$.

Nézzük meg azt, hogy milyen n-re lehetséges $i \neq 2n-1$. Ekkor $n-2$-nek és $2n-1$-nek van 1-nél nagyobb közös osztója, ami csak a $(2n-1) - 2 \cdot (n-2) = 3$ lehet, éspedig abban az esetben, ha $n = 3e+2$ alakú. Vagyis $i = \dfrac{2n-1}{3}$ lehetséges még. Ekkor a ($*$) sorozatban éppen a 3-mal osztható sorszámú pontok találhatóak. A sorszámokhoz 1-et, ill. 2-t adva kaphatjuk az alábbi sorozatokat:

$$A_{1(n-2)+1}; A_{2(n-2)+1}; \ldots; A_{\frac{2n-1}{3}(n-2)+1}, \tag{$**$}$$

$$A_{1(n-2)+2}; A_{2(n-2)+2}; \ldots; A_{\frac{2n-1}{3}(n-2)+2}. \tag{$***$}$$

A három sorozat tartalmazza az összes pontot. Az előzőekhez hasonlóan igazolható, hogy ha egy sorozat $\frac{2n-1}{3}$ elemet tartalmaz, akkor legfeljebb $\frac{n-2}{3}$ elem színezhető ki úgy, hogy a színezés rossz legyen. Ez mindhárom esetben megtehető, így adódik, hogy $n-2$ pontot még ki lehet színezni rosszul, $n-1$-et azonban már nem.

Tehát: ha $n = 3e + 2$ alakú, akkor $k = n - 1$, különben $k = n$.

Balog József

3. *Határozzuk meg az összes olyan $n > 1$ egész számot, amelyre $\frac{2^n+1}{n^2}$ is egész szám.*

Megoldás. $n = 3$ nyilván megoldás, hiszen $2^3 + 1 = 9$ osztható $3^2 = 9$-cel. Megmutatjuk, hogy más megoldás nem létezik.

Írjuk ehhez az n-et $3^k \cdot d$ alakba ($k \geq 0$, 3 és d relatív prímek). Ekkor

$$2^n + 1 = 2^{3^k d} + 1 = (2^d + 1) \prod_{i=0}^{k-1} (2^{2 \cdot 3^i d} - 2^{3^i d} + 1). \tag{1}$$

Mivel minden páratlan t egészre $2^{2t} - 2^t + 1$ osztható 3-mal, de nem osztható 9-cel, ezért (1) jobb oldalán a k-tényezős szorzat 3-nak pontosan a k-adik hatványával osztható.

Ha most a fenti alakú szám megoldás, azaz $n^2 = (3^k d)^2$ osztója $2^n + 1$-nek, akkor a „hiányzó” 3-as tényezőket az (1)-beli szorzat első tényezőjének kell tartalmaznia:

$$3^k | 2^d + 1,$$

ami csak a $k = 0$, vagy 1 esetekben lehetséges, hiszen $(d, 3) = 1$ miatt $9 \nmid 2^d + 1$.

Megmutatjuk, hogy d értéke csak 1 lehet. Tegyük fel, hogy $d > 1$ és legyen a d legkisebb prímosztója p, ami legalább 5, másfelől $(p - 1, d) = 1$.

A feltétel miatt

$$p | 2^n + 1, \tag{2}$$

a kis Fermat-tételből pedig

$$p | 2^{p-1} - 1$$

következik. Így a

$$2^{2n} \equiv 1 (\text{mod } p)$$

és

$$2^{p-1} \equiv 1 (\text{mod } p)$$

kongruenciákból

$$2^m \equiv 1 (\text{mod } p) \tag{3}$$

következik, ahol $m = (2n, p - 1)$.

Mivel $2n | 2 \cdot 3d$ és $(p - 1, d) = 1$, ezért szükségképpen $m | 6$, azaz (3) szerint a p prímszám az 1, 3, 7, 63 számok valamelyikének 3-nál nagyobb prímtényezője, ami csak úgy lehetséges, ha $p = 7$. Ez viszont lehetetlen, ugyanis (2) alapján ekkor $7 | 2^n + 1$, ami egyetlen pozitív egész n kitevővel sem teljesül. A d tehát valóban nem lehet 1-nél nagyobb.

A feladat feltétele így csak azokra az $n = 3^k d$ számokra teljesülhet, amelyekre $k \leq 1$ és $d = 1$. Ha $k = 0$, akkor $n = 1$, ha pedig $k = 1$, akkor $n = 3$.

Pataki János

4. *Jelölje Q^+ a pozitív racionális számok halmazát. Adjunk példát olyan $F : Q^+ \to Q^+$ függvényre, amelyre*

$$f\big(x \cdot f(y)\big) = \frac{f(x)}{y}$$

teljesül minden x, $y \in Q^+$ esetén.

Megoldás. Definiáljuk az f függvényt a következőképpen: Vegyük tetszőleges $x \in Q^+$ számnak a prímfelbontását, ahol a prímeket a szokásosan értelmezzük, de nem csak nemnegatív, hanem egész hatványon fordulhatnak elő a prímfelbontásban. Vegyük sorra a prímeket (minden x esetében ugyanolyan sorrendben): p_1, p_2, p_3, $\ldots$. Ekkor $f(x)$ legyen az a szám, amelyet x prímfelbontásából kapunk úgy, hogy p_{2n} helyébe p_{2n-1}-et, p_{2n-1} helyébe p_{2n}^{-1}-et írunk. Mivel mind a prímfelbontás, mind a behelyettesítési művelet egyértelmű, ezért $f(x)$ is. (Persze csak adott prímfelsorolás mellett) Bebizonyítjuk, hogy f teljesíti a kívánt feltételeket:

I. $f(x) \in Q^+$ nyilvánvaló.

II. Mivel f multiplikatív, és a kritérium nem érzékeny a multiplikativitásra, ezért elég $f\big(f(y)\big) = y^{-1}$-et igazolni, és ezt is csak prímekre. Az f definíciója szerint

$$\begin{array}{lll} y = p_{2n} & \text{esetén} & f\big(f(y)\big) = f(p_{2n-1}) = p_{2n}^{-1} = y^{-1}, \\ y = p_{2n-1} & \text{esetén} & f\big(f(y)\big) = f(p_{2n}^{-1}) = p_{2n-1}^{-1} = y^{-1}. \end{array}$$

Ezzel beláttuk az $f\big(x \cdot f(y)\big) = \dfrac{f(x)}{y}$ kritérium teljesülését is, azaz az így kapott f függvény példa ilyen függvényre.

Megjegyzés. Hammel-bázissal R^+-ra is általánosítható a feladat, illetve minden ilyen f függvény jellemezhetővé válik. (A versenyen beadott, R^+-ra is általánosított megoldásom is ezzel dolgozik, míg az itt leírt megoldásom alapötletét a versenyen csak megjegyzésben közöltem.)

Lakos Gyula

5. *Egy $n_0 > 1$ egész számból kiindulva két játékos, A és B felváltva neveznek meg n_1, n_2, n_3, … egész számokat, az alábbi szabályokat betartva.*

Ha n_{2k} már meg van nevezve, A tetszése szerint választ egy n_{2k+1} egész számot, amire

$$n_{2k} \leq n_{2k+1} \leq n_{2k}^2$$

teljesül. Ha már n_{2k+1} meg van nevezve, B tetszése szerint választ egy n_{2k+2} egész számot, amire

$$\frac{n_{2k+1}}{n_{2k+2}}$$

legalább 1 kitevőjű prímhatvány. Az A játékos nyer, ha 1990-et nevezi meg, B játékos nyer, ha 1-et nevezi meg.

Mely n_0 értékekre teljesül:

a) A-nak van nyerő stratégiája,

b) B-nek van nyerő stratégiája,

c) egyik játékos sem tudja kikényszeríteni a győzelmet?

Megoldás. Rögtön észrevehetjük, hogy B-nek mindig csökkentenie kell az utoljára elhangzott számot, A-nak pedig növelnie (legalábbis nem csökkentenie). Az is látszik, hogy B csak akkor nyerhet, ha A előtte prímhatványt mondott. Mivel A mindig egy $[n_{2k}, n_{2k}^2]$ típusú intervallumból választhat számot, ezért — úgy érezzük — B-nek elég kevés esetben van esélye a nyerésre, feltéve persze, hogy A valamilyen ésszerű stratégiával játszik.

Célszerű tehát először az a) kérdéssel foglalkoznunk. Ha $n_0 \leq 1990 < n_0^2$, akkor A triviálisan nyer az $n_1 = 1990$ számmal, ezért $45 \leq n_0 \leq 1990$ esetén A-nak van nyerési stratégiája.

Az $1990 < n_0$ esetben A nem alkalmazhatja ezt a módszert, de ha tud olyan n_1 számot mondani, amelyre B csak $45 \leq n_2 \leq 1990$ számmal válaszolhat, akkor ismét A nyer, hiszen ekkor n_0 szerepét n_2 veszi át. Legyen például $n_1 = 47 \cdot 53 = 2491$ – A választhatja ezt a számot $1990 < n_0 \leq 2491$ esetén –, ezzel $n_2 = 47$ vagy 53.

Ezzel beláttuk, hogy $45 \leq n_0 \leq 2491$ esetén A tud nyerni, hasonlóan fogjuk igazolni k szerinti teljes indukcióval, hogy $45 \leq n_0 \leq 2^{k-1} \cdot 2491$ esetén (k pozitív egész) is A-nak van nyerési stratégiája.

$k = 1$-re már beláttuk az állítást, tegyük fel ezért, hogy valamilyen $k \geq 1$-re igaz az állítás, azt kell megmutatnunk, hogy

$$2^{k-1} \cdot 2491 < n_0 \leq 2^k \cdot 2491$$

esetén A-nak van nyerési stratégiája.

Válassza ehhez A az $n_1 = 2^k \cdot 2491 = 2^k \cdot 47 \cdot 53$ számot, nyilván $n_0 \leq n_1 < n_0^2$. Ezek után B csak egy $n_2 = n_1/p^\alpha = (2^k \cdot 47 \cdot 53)/p^\alpha$ alakú egészet választhat, ahol p^α prímhatvány. Erre $47 < n_2 \leq \dfrac{n_1}{2} = 2^{k-1} \cdot 2491$, ami azt jelenti induktív feltevésünk szerint, hogy A-nak van nyerési stratégiája, az állítás $(k+1)$-re is fennáll.

Eddigi eredményeinket összefoglalva kapjuk, hogy a $45 \leq n_0$ esetben A-nak van nyerési stratégiája.

Próbáljuk meg a fennmaradó $n_0 < 45$ eseteket is erre az esetre visszavezetni. A-nak olyan n_1 számot kell mondania, amelyre B csak egy $45 \leq n_2$ számot választhat. Tekintsük ehhez az $n_1 = 3^2 \cdot 5 \cdot 11 = 495$ számot – A választhatja ezt a $23 \leq n_0 \leq 44$ esetben, mert ekkor $n_0 \leq n_1 \leq n_0^2$ –, ezzel n_2-re

$$n_2 \geq \min(3^2 \cdot 5, 3^2 \cdot 11, 5 \cdot 11) = 3^2 \cdot 5 = 45,$$

vagyis az előzőek alapján A-nak van nyerési stratégiája.

Hátra van az $n_0 \leq 22$ eset vizsgálata; A-nak most már elegendő olyan n_1 számot mondania, amelyre $n_2 \geq 23$. Legyen ehhez $n_1 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$, ezzel $n_2 \geq 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Mivel a $15 \leq n_0 \leq 22$ esetben $n_0 \leq n_1 \leq n_0^2$ is teljesül, ezért ilyenkor is A-nak van nyerési stratégiája.

Tovább „lépegetünk” lefelé – mindig ugyanazzal a redukáló szándékkal: $11 \leq n_0 \leq 14$ esetén A száma legyen $n_1 = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$; nyilván $n_0 \leq n_1 \leq n_0^2$, és $n_2 \geq 3 \cdot 5 = 15$, vagyis innen A nyerni tud – az eddig bizonyítottak miatt.

Végül legyen $n_1 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ ha $8 \leq n_0 \leq 10$; ekkor $n_0 \leq n_1 \leq n_0^2$ és $n_2 \geq \min(2^2 \cdot 3,\ 2^2 \cdot 5,\ 3 \cdot 5) = 2^2 \cdot 3 = 12$, ami azt jelenti, hogy ekkor is A-nak van nyerési stratégiája.

Ezzel beláttuk, hogy $8 \leq n_0$ esetén A-nak van nyerési stratégiája.

Ezzel a módszerrel nem tudjuk tovább csökkenteni n_0 olyan lehetséges értékeit, amelyekből kiindulva A el tudja érni a győzelmet. Azt tapasztaljuk ugyanis, hogy $n_0 < 8$ esetén A nem tud olyan n_1 számot mondani, amelyre B csak egy $n_2 \geq 8$-cal válaszolhatna. Ez a tény azt *sejteti* velünk, hogy $n_0 < 8$ esetén B legalább egy döntetlent ki tud kényszeríteni. (Valójában az előbbi észrevétel *igazolja* is sejtésünket, hiszen ha B nem nyer, akkor B még mindig ki tud kényszeríteni egy végtelen

$$n_0 < 8, n_1 < 64, n_2 < 8, n_3 < 64, n_4 < 8, n_5 < 64,\ \ldots$$

számsorozatot, ami azt jelenti, hogy A sem nyerhet, mert nem nevezheti meg az 1990-et. A későbbiekben azonban úgyis pontosabban megvizsgáljuk a döntetlen lehetőségeit, ezért egyelőre a sejtés elegendő számunkra.)

Foglalkozzunk most a b) kérdéssel.

Ha $n_0 = 2$, akkor $n_0 \leq n_1 \leq n_0^2$ miatt A csak prímhatványt választhat ($n_1 = 2, 3, 4$), vagyis B mondhatja az $n_2 = 1$ számot, amivel megnyeri a játékot.

Ha $n_0 = 3$, akkor $n_1 = 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$. Ha n_1 prímhatvány, akkor $n_2 = 1$-gyel B nyer, egyébként $n_1 = 6 = 2 \cdot 3$. Ekkor B választhatja az $n_2 = 2$ számot, és ekkor – mint az előbb igazoltuk – B-nek van nyerési stratégiája. (n_0 szerepét n_2 veszi át).

Ha $n_0 = 4$, akkor B az előbbiekhez hasonlóan el tudja érni a győzelmet, amennyiben n_1 prímhatvány, vagy $n_1 \leq 3^2$. Különben pedig $n_1 = 10,\ 12,\ 14,\ 15$; és ezeket az eseteket rendre visszavezethetjük az előzőekre az $n_2 = 2,\ 3,\ 2,\ 3$ választással, ugyanis $n_2 \leq 3$ esetén B-nek van nyerési stratégiája.

Végül $n_0 = 5$ esetén $n_0 \leq n_1 \leq n_0^2$ miatt n_1 prímhatvány, vagy $n_1 \leq 4^2$ (amire már láttuk, hogy B-nek van nyerési stratégiája), vagy pedig $n_1 = 18,\ 20,\ 21,\ 22,\ 24$, és ezeket az $n_2 = 2,\ 2^2,\ 3,\ 2,\ 3$ választással rendre visszavezethetjük a már megvizsgált $n_0 \leq 4$ esetre (n_0 szerepét n_2 veszi át).

Összességében tehát kimondhatjuk, hogy $2 \leq n_0 \leq 5$ *esetén B-nek van nyerési stratégiája.*

Meg kell még vizsgálnunk az $n_0 = 6, 7$ esetet. Mivel a B-nek győzelmet jelentő n_0 kezdőértékek lehetséges értékeit nem tudjuk a *szokásos módszerünkkel* tovább növelni, ezért igen *valószínűnek látszik,* hogy $n_0 = 6, 7$ esetén egyik játékos sem tudja kikényszeríteni a győzelmet. Ehhez csak azt kell igazolnunk, hogy mind A, mind B tud úgy játszani, hogy a másik ne nyerhessen.

Legyen tehát $n_0 = 6$ vagy 7, és A válassza az $n_1 = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ számot, amelyre nyilván $n_0 < n_1 < n_0^2$. B ezután csak $n_2 = 2 \cdot 5 = 10$-et, vagy $n_2 = 3 \cdot 5 = 15$-öt, vagy $n_2 = 2 \cdot 3 = 6$-ot választhat.

Az $n_2 = 10, 15$ esetben – mint már láttuk – A-nak van nyerési stratégiája, az $n_2 = 6$ eset pedig A szempontjából ekvivalens az $n_0 = 6$ kezdéssel (tehát újra jöhet $n_0 = 30$, stb.) így beláttuk, hogy ha A ügyesen játszik, akkor B nem nyerhet.

Ugyanez áll viszont B-re is. Ha ugyanis $n_0 = 6$ vagy 7, akkor $6 \leq n_1 \leq 49$, és ha végignézzük a $6,\ 7,\ \ldots,\ 49$ számokat, azt találjuk, hogy B mindig tud olyan n_2 számot mondani, amelyre $n_2 \leq 6$. Ha $n_2 \leq 5$, akkor a fentiek miatt nyerési stratégiája van B-nek (esetleg $n_2 = 1$), ha pedig $n_2 = 6$, akkor ugyanolyan helyzetet kapunk, mint amilyennel kezdtük a játékot (amikor $n_0 = 6,\ 7$).

Ezzel a feladatot megoldottuk, eredményeinket a következőképpen foglalhatjuk össze:

a) A-nak van nyerési stratégiája, ha $8 \leq n_0$,

b) B-nek van nyerési stratégiája, ha $2 \leq n_0 \leq 5$, végül

c) egyik játékos sem tudja kikényszeríteni a győzelmet, ha $n_0 = 6, 7$.

Harcos Gergely

6. *Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan konvex 1990-szög, amelyik rendelkezik az alábbi két tulajdonsággal:*

a) *A sokszög minden szöge egyenlő.*

b) *Az oldalak hosszai az 1^2, 2^2, 3^2, …, 1989^2, 1990^2 számok valamilyen sorrendben.*

Jelölje ε a 995-ik komplex egységgyökök közül az elsőt. Tekintsük a következő 995 tagú összeget:

(1)
$$\begin{aligned} S = 0 \cdot \varepsilon^0 + 199 \cdot \varepsilon^{199} + 398 \cdot \varepsilon^{398} + 597 \cdot \varepsilon^{597} + 796 \cdot \varepsilon^{796} + \\ + 1 \cdot \varepsilon^5 + 200 \cdot \varepsilon^{204} + 399 \cdot \varepsilon^{403} + 598 \cdot \varepsilon^{602} + 797 \cdot \varepsilon^{801} + \\ + 2 \cdot \varepsilon^{10} + 201 \cdot \varepsilon^{209} + 400 \cdot \varepsilon^{408} + 599 \cdot \varepsilon^{607} + 798 \cdot \varepsilon^{806} + \\ + \ldots \\ + 198 \cdot \varepsilon^{990} + 397 \cdot \varepsilon^{194} + 596 \cdot \varepsilon^{393} + 795 \cdot \varepsilon^{592} + 994 \cdot \varepsilon^{791} + \end{aligned}$$

(Minden tag ε-os szorzandója a felette levőének ε^5-szerese. Felhasználjuk, hogy $\varepsilon^{995} = 1$. Az együtthatók a 995-ik egységgyököket megszorozzák a [0; 994] intervallum egészeivel. Az (1)-et a nem nulla $(1-\varepsilon^{199})$-el szorozva:

$$
\begin{aligned}
(2)\qquad (1-\varepsilon^{199})S &= 0\cdot\varepsilon^{0}-0\cdot\varepsilon^{199}+199\cdot\varepsilon^{199}-199\cdot\varepsilon^{398}+398\cdot\varepsilon^{398}-\cdot 394\cdot\varepsilon^{597}+\\
&\quad +597\cdot\varepsilon^{597}-597\cdot\varepsilon^{796}+796\cdot\varepsilon^{796}-796\cdot\varepsilon^{995}+\ldots=\\
&=-796\cdot\varepsilon^{0}+199\cdot\varepsilon^{199}+199\cdot\varepsilon^{398}+199\cdot\varepsilon^{597}+199\cdot\varepsilon^{796}+\ldots=\\
&=199(\underbrace{\varepsilon^{0}+\varepsilon^{1}+\varepsilon^{2}+\varepsilon^{3}+\ldots+\varepsilon^{994}}_{S_1})-995\,(\underbrace{\varepsilon^{0}+\varepsilon^{5}+\varepsilon^{10}+\varepsilon^{15}+\ldots+\varepsilon^{990}}_{S_2}).
\end{aligned}
$$

Mivel $S_1=S_2=0$, ezért $(1-\varepsilon^{199})S=0$, amiből $S=0$, innen $995(997S_1+2S)=0$. Így a 995-ik egységgyökök megszámozhatóak a $995\cdot 997$, $995\cdot 999$, $\ldots$, $995\cdot 2985$ számokkal úgy, hogy minden egységgyököt a rá írt számmal megszorozva, majd az így kapott vektorokat összeadva nullvektort kapunk. A $995(995+2k)$ hosszúságú vektort egy vele egyirányú $(995+i)^2$, és egy vele ellentétes irányú i^2 hosszúságú vektorral helyettesítve az összeg változatlan marad, hiszen $(995+k)^2-k^2=995(995+2k)$. Tehát az 1990-edik egységgyököket megszámoztuk az 1^2, 2^2, 3^2, $\ldots$, 1990^2 számokkal úgy, hogy mindegyiket a ráírt számmal szorozva, majd ezeket összeadva az összeg a nullvektor lesz. Másrészt azonban ezeket a súlyozott egységgyököket növekvő argumentum szerint az „orr-farok” módszerrel egymás után rakva éppen egy, a feladatban kért 1990-szöget kapunk.

Csirik János