1. a) A két szám egyenlő, hiszen

$$\sqrt{4-2\sqrt{3}}-\sqrt{4+2\sqrt{3}}=|\sqrt{3}-1|-|\sqrt{3}+1|=-2, \quad \text{és}$$
$$\frac{tg\frac{2\pi}{3}}{\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)}=\frac{-tg\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}=-\frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}}=-2.$$

b)

$$3\left(1+\log_{1/8}\frac{1}{3}\right)=3+3\,\log_{2^{-3}}3^{-1}=$$
$$=3+3\cdot(-1)\left(-\frac{1}{3}\right)\log_2 3=\log_2 2^3+\log_2 3=\log_2 24.$$

Másrészt $2\log_2 5=\log_2 25$, ezért ez a szám a nagyobb, mert a kettes alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekedő.

2. Alkalmazzuk a $\sin 2x=2\sin x\cdot\cos x$ azonosságot és egyszerűsítsük a törteket. Most $\alpha\neq 90°$, $\beta\neq 90°$, $\gamma\neq 90°$ és

$$\frac{\sin\alpha}{2\cos\alpha}=\frac{\sin\beta}{2\cos\beta}=\frac{\sin\gamma}{2\cos\gamma},$$

ahonnan

$$\mathrm{tg}\alpha=\mathrm{tg}\beta=\mathrm{tg}\gamma,$$

amiből $\alpha=\beta=\gamma$, tehát mindhárom szög $60°$, a háromszög valóban egyenlő oldalú.

3.a) Az egyenletnek akkor van értelme, ha $x\geqq -1$ és $x\neq 3$. Minden ilyen szám megoldása az egyenletnek, hiszen

$$\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}=\frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{x+1-4}=\sqrt{x+1}+2.$$

b) Az egyenletnek akkor van értelme, ha $-2<x<2$. Minden ilyen szám megoldása az egyenletnek, hiszen

$$\lg(4-x^2)-\lg(2+x)=\lg(2-x)(2+x)-\lg(2+x)=$$
$$=\lg(2-x)+\lg(2+x)-\lg(2+x)=\lg(2-x).$$

c) Az egyenletnek az $x=\pi+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ számok kivételével minden valós számra értelme van. Minden ilyen szám megoldása az egyenletnek, hiszen

$$\frac{\sin\alpha-\frac{1}{2}\sin(\pi+2\alpha)}{1+\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha-\frac{1}{2}\left(-2\sin\alpha\cos\alpha\right)}{1+\cos\alpha}=\frac{(\sin\alpha)(1+\cos\alpha)}{1+\cos\alpha}=\sin\alpha.$$

4. Az első egyenletből $x=y+a+1$. Helyettesítsük ezt a második egyenletbe.

$$2y\left(y+a+1\right)+2y+a^2+4=0,$$
$$2y^2+2\left(a+2\right)y+a^2+4=0.$$

Ennek az egyenletnek a diszkriminánsa: $D=-4\left(a-2\right)^2$. Igy, ha $a\neq 2$, akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása, ha pedig $a=2$, akkor $y=-2$, $x=1$ az egyetlen megoldás.

5. Jelölje a két befogó hosszát a és b. Az érintési pont, ahol a beírható kör érinti a befogókat, a befogókat két részre osztja: 1, $a-1$, illetve 1, $b-1$ hosszúságú szakaszokra. Egy külső pontból a körhöz húzható érintőszakaszok egyenlőségét felhasználva adódik, hogy az átfogó hossza $c=a-1+b-1$. A feltételek miatt

$$a+b+a-1+b-1=15 \text{ és}$$
$$(a+b-2)^2=a^2+b^2.$$

Innen $a+b=\dfrac{17}{2}$ és $ab=15$. Ennek megoldása $a=6$, $b=\dfrac{5}{2}$ vagy $a=\dfrac{5}{2}$, $b=6$. A derékszögű háromszög oldalainak hossza tehát 6, $\dfrac{5}{2}$, $\dfrac{13}{2}$ egység.

6. A feltételeknek két téglalap felel meg, az ABC_1D_1 és az ABC_2D_2. Az $\overrightarrow{AB}$ vektor pozitív irányú 90°-os elforgatottjának $\frac{3}{2}$-szerese egyenlő az $\overrightarrow{AD_1}$ és a $\overrightarrow{BC_1}$ vektorokkal, a negatív irányú 90°-os elforgatottjának $\frac{3}{2}$-szerese egyenlő az $\overrightarrow{AD_2}$ és a $\overrightarrow{BC_2}$ vektorokkal.

Mivel $\overrightarrow{AB} = (6;\, 4)$ és $\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} = (9;\, 6)$ ezért $\overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{BC_1} = (-6;\, 9)$ és $\overrightarrow{AD_2} = \overrightarrow{BC_2} = (6;\, -9)$.

A C_1, D_1, C_2, D_2 pontok koordinátái megegyeznek az ezekbe a pontokba mutató helyvektorok koordinátáival.

$$\overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC_1} = (4;\, 2) + (-6;\, 9) = (-2;\, 11).$$
$$\overrightarrow{OD_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD_1} = (-2;\, -2) + (-6;\, 9) = (-8;\, 7),$$
$$\overrightarrow{OC_2} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC_2} = (4;\, 2) + (6;\, -9) = (10;\, -7),$$
$$\overrightarrow{OD_2} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD_2} = (-2;\, -2) + (6;\, -9) = (4;\, -11).$$

A keresett csúcspontok koordinátái: $C_1\,(-2;\, 11)$, $D_1\,(-8;\, 7)$, $C_2(10;\, -7)$, $D_2(4;\, -11)$.

(A csúcspontokat megkaphatjuk a BC egyenes (egyenlete $3x + 2y = 16$) és a B középpontú; $\frac{3}{2}AB$ sugarú kör (egyenlete $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 117$), illetve az AD egyenes ($3x + 2y = -10$) és az A középpontú, $\frac{3}{2}AB$ sugarú kör (egyenlete $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 117$) metszéspontjaként is.

7. Az egyik feltétel szerint $a_2 + d = 3a_2$, ahonnan

$$a_2 = \frac{d}{2}, \quad \text{így} \quad a_1 = \frac{d}{2} \quad \text{és} \quad a_3 = \frac{3}{2}d.$$

A másik feltétel szerint

$$40 \cdot \frac{3}{2}d = \frac{n}{2}(-d + (n-1)d),$$

ahonnan

$$d\,(n^2 - 2n - 120) = 0.$$

Ha $d = 0$, akkor a sorozat minden eleme 0, ha $d \neq 0$, akkor $n = 12$ (n pozitív egész, így $n = -10$ nem ad megoldást). Ekkor

$$a_{12} = -\frac{d}{2} + 11d = \frac{21}{2}d.$$

8. a) Azonos átalakítással $2^{\sqrt{x+2}} < 2^{\sqrt{5}}$, ami akkor teljesül, ha $-2 \leqq x < 3$.

b) Az $\frac{1}{2}$ alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton csökkenő, ezért az egyenlőtlenség akkor teljesül, ha $x^2 - 3x - 2 > 0$ és $x^2 - 3x - 2 > 2$, azaz ha $x < -1$ vagy $x > 4$.

c) Azonos átalakításokkal és az egyenlőtlenség rendezésével adódik, hogy $\sin 2x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$, ami akkor teljesül, ha

$$\frac{4\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$