

1. a) A két szám egyenlő, hiszen

$$\sqrt{4-2\sqrt{3}} - \sqrt{4+2\sqrt{3}} = |\sqrt{3}-1| - |\sqrt{3}+1| = -2, \quad \text{és}$$
$$\frac{\operatorname{tg} \frac{2\pi}{3}}{\sin \left(-\frac{5\pi}{3}\right)} = \frac{-\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{\cos \frac{\pi}{3}} = -2.$$

b)

$$3 \left(1 + \log_{1/8} \frac{1}{3}\right) = 3 + 3 \log_{2^{-3}} 3^{-1} =$$
$$= 3 + 3 \cdot (-1) \left(-\frac{1}{3}\right) \log_2 3 = \log_2 2^3 + \log_2 3 = \log_2 24.$$

Másrészt $2 \log_2 5 = \log_2 25$, ezért ez a szám a nagyobb, mert a kettes alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekedő.

2. Alkalmazzuk a $\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$ azonosságot és egyszerűsítsük a törtet. Most $\alpha \neq 90^\circ$, $\beta \neq 90^\circ$, $\gamma \neq 90^\circ$ és

$$\frac{\sin \alpha}{2 \cos \alpha} = \frac{\sin \beta}{2 \cos \beta} = \frac{\sin \gamma}{2 \cos \gamma},$$

ahonnan

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \gamma,$$

amiből $\alpha = \beta = \gamma$, tehát mindhárom szög 60° , a háromszög valóban egyenlő oldalú.

3.a) Az egyenletnek akkor van értelme, ha $x \geq -1$ és $x \neq 3$. Minden ilyen szám megoldása az egyenletnek, hiszen

$$\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} = \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{x+1-4} = \sqrt{x+1}+2.$$

b) Az egyenletnek akkor van értelme, ha $-2 < x < 2$. Minden ilyen szám megoldása az egyenletnek, hiszen

$$\lg(4-x^2) - \lg(2+x) = \lg(2-x)(2+x) - \lg(2+x) =$$
$$= \lg(2-x) + \lg(2+x) - \lg(2+x) = \lg(2-x).$$

c) Az egyenletnek az $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ számok kivételével minden valós számra értelme van. Minden ilyen szám megoldása az egyenletnek, hiszen

$$\frac{\sin \alpha - \frac{1}{2} \sin(\pi + 2\alpha)}{1 + \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha - \frac{1}{2} (-2 \sin \alpha \cos \alpha)}{1 + \cos \alpha} = \frac{(\sin \alpha)(1 + \cos \alpha)}{1 + \cos \alpha} = \sin \alpha.$$

4. Az első egyenletből $x = y + a + 1$. Helyettesítsük ezt a második egyenletbe.

$$2y(y+a+1) + 2y + a^2 + 4 = 0,$$
$$2y^2 + 2(a+2)y + a^2 + 4 = 0.$$

Ennek az egyenletnek a diszkriminánsa: $D = -4(a-2)^2$. Így, ha $a \neq 2$, akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása, ha pedig $a = 2$, akkor $y = -2$, $x = 1$ az egyetlen megoldás.

5. Jelölje a két befogó hosszát a és b . Az érintési pont, ahol a beírható kör érinti a befogókat, a befogókat két részre osztja: 1 , $a-1$, illetve 1 , $b-1$ hosszúságú szakaszokra. Egy külső pontból a körhöz húzható érintőszakaszok egyenlőségét felhasználva adódik, hogy az átfogó hossza $c = a-1 + b-1$. A feltételek miatt

$$a + b + a - 1 + b - 1 = 15 \quad \text{és}$$
$$(a + b - 2)^2 = a^2 + b^2.$$

Innen $a + b = \frac{17}{2}$ és $ab = 15$. Ennek megoldása $a = 6$, $b = \frac{5}{2}$ vagy $a = \frac{5}{2}$, $b = 6$. A derékszögű háromszög oldalainak hossza tehát 6 , $\frac{5}{2}$, $\frac{13}{2}$ egység.

6. A feltételeknek két téglalap felel meg, az ABC_1D_1 és az ABC_2D_2 . Az \overrightarrow{AB} vektor pozitív irányú 90° -os elforgatottjának $\frac{3}{2}$ -szerese egyenlő az $\overrightarrow{AD_1}$ és a $\overrightarrow{BC_1}$ vektorokkal, a negatív irányú 90° -os elforgatottjának $\frac{3}{2}$ -szerese egyenlő az $\overrightarrow{AD_2}$ és a $\overrightarrow{BC_2}$ vektorokkal.

Mivel $\overrightarrow{AB} = (6; 4)$ és $\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} = (9; 6)$ ezért $\overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{BC_1} = (-6; 9)$ és $\overrightarrow{AD_2} = \overrightarrow{BC_2} = (6; -9)$.

A C_1, D_1, C_2, D_2 pontok koordinátái megegyeznek az ezekbe a pontokba mutató helyvektorok koordinátáival.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC_1} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC_1} = (4; 2) + (-6; 9) = (-2; 11), \\ \overrightarrow{OD_1} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD_1} = (-2; -2) + (-6; 9) = (-8; 7), \\ \overrightarrow{OC_2} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC_2} = (4; 2) + (6; -9) = (10; -7), \\ \overrightarrow{OD_2} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD_2} = (-2; -2) + (6; -9) = (4; -11).\end{aligned}$$

A keresett csúcspontok koordinátái: $C_1(-2; 11)$, $D_1(-8; 7)$, $C_2(10; -7)$, $D_2(4; -11)$.

(A csúcspontokat megkaphatjuk a BC egyenes (egyenlete $3x + 2y = 16$) és a B középpontú, $\frac{3}{2}AB$ sugarú kör (egyenlete $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 117$), illetve az AD egyenes ($3x + 2y = -10$) és az A középpontú, $\frac{3}{2}AB$ sugarú kör (egyenlete $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 117$) metszéspontjaként is.

7. Az egyik feltétel szerint $a_2 + d = 3a_2$, ahonnan

$$a_2 = \frac{d}{2}, \quad \text{így } a_1 = \frac{d}{2} \quad \text{és } a_3 = \frac{3}{2}d.$$

A másik feltétel szerint

$$40 \cdot \frac{3}{2}d = \frac{n}{2}(-d + (n - 1)d),$$

ahonnan

$$d(n^2 - 2n - 120) = 0.$$

Ha $d = 0$, akkor a sorozat minden eleme 0, ha $d \neq 0$, akkor $n = 12$ (n pozitív egész, így $n = -10$ nem ad megoldást). Ekkor

$$a_{12} = -\frac{d}{2} + 11d = \frac{21}{2}d.$$

8. a) Azonos átalakítással $2^{\sqrt{x+2}} < 2^{\sqrt{5}}$, ami akkor teljesül, ha $-2 \leq x < 3$.

b) Az $\frac{1}{2}$ alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton csökkenő, ezért az egyenlőtlenség akkor teljesül, ha $x^2 - 3x - 2 > 0$ és $x^2 - 3x - 2 > 2$, azaz ha $x < -1$ vagy $x > 4$.

c) Azonos átalakításokkal és az egyenlőtlenség rendezésével adódik, hogy $\sin 2x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$, ami akkor teljesül, ha

$$\frac{4\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$