

1. Mivel a trapéz érintőnégyzet, ezért a párhuzamos oldalak összege 8 egység, a középvonal hossza 4 egység. Legyen az egyik párhuzamos oldal hossza  $4 - x$ , akkor a másik párhuzamos oldal  $4 + x$  egység. Jelölje a trapéz magasságát  $2m$ . A feltétel szerint

$$\frac{(8-x)m}{(8+x)m} = \frac{5}{11}, \quad \text{ahonnan } x = 3.$$

A trapéz párhuzamos oldalainak hossza 1, illetve 7 egység.

2. a) Az  $x > 4$  feltétellel az egyenlet ekvivalens az  $(x-2)(x-4) = 1$  egyenlettel. Az  $x_1 = 3 + \sqrt{2}$  az egyenlet egyetlen megoldása.

b) Az  $x > 2$ ,  $x \neq 4$  feltételekkel az egyenlet ekvivalens az  $(x-2)^2(x-4)^2 = 1$  egyenlettel. Az egyenlet megoldásai

$$x_1 = 3 + \sqrt{2} \quad \text{és} \quad x_3 = 3.$$

c) Az  $x \neq 2$  és  $x \neq 4$  feltételekkel az egyenlet ekvivalens az  $(x-2)^2(x-4)^2 = 1$  egyenlettel. Az egyenlet megoldásai  $x_1 = 3 + \sqrt{2}$ ,  $x_2 = 3 - \sqrt{2}$  és  $x_3 = 3$ .

3. A keresett kör középpontja rajta van az  $A$  ponton átmenő, az adott érintőre merőleges egyenesen, amelynek egyenlete  $x - y = 1$ , és az  $x^2 + y^2 = 1$  egyenletű körön. A feltételeknek két kör felel meg, ezek középpontjai:  $C_1(1; 0)$ , illetve  $C_2(0; -1)$ .

A keresett körök sugarának négyzete

$$r_1^2 = AC_1^2 = 8, \quad \text{illetve} \quad r_2^2 = AC_2^2 = 18.$$

A körök egyenlete:

$$(x-1)^2 + y^2 = 8, \quad \text{illetve} \quad x^2 + (y+1)^2 = 18.$$

4. Ha az egyenletnek van valós gyöke, akkor az  $x_1$ ,  $x_2$  gyökökre

$$x_1 + x_2 = 2 - m \quad \text{és} \quad x_1 x_2 = m + 5.$$

Mivel

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2,$$

ezért

$$10 = (2 - m)^2 - 2(m + 5), \quad m = -2 \quad \text{vagy} \quad m = 8.$$

Az  $m = -2$  megfelel a feltételnek,  $m = 8$  nem, hiszen ekkor az egyenletnek nincs valós megoldása.

5. Legyen a mértani sorozat negyedik eleme  $a$ , hányadosa  $q$ . A feltételből következik, hogy  $q \neq 0$ . A feltétel szerint

$$\frac{a}{q} \cdot aq = 9, \quad \text{és} \quad \frac{a}{q^2} + aq^2 = -\frac{51}{4}.$$

Az első egyenletből  $a = 3$  vagy  $a = -3$ . Ha  $a = 3$ , akkor a második egyenletnek nincs valós megoldása, ha  $a = -3$ , akkor  $q^2 = 4$  vagy  $q^2 = \frac{1}{4}$ . A feltételeknek négy sorozat felel meg.

$$a_1 = -\frac{3}{8}, \quad q = 2 \quad \text{vagy} \quad a_1 = \frac{3}{8}, \quad q = -2$$

Vagy

$$a_1 = -24, \quad q = \frac{1}{2} \quad \text{vagy} \quad a_1 = 24, \quad q = -\frac{1}{2}.$$

6. Legyen a  $B$ , illetve  $C$  pont vetülete az  $AD$  egyenesen  $B_1$ , illetve  $C_1$ . Az  $ABB_1$  derékszögű háromszögben  $AB_1 = \sqrt{3}$ ,  $BB_1 = 3$ . A trapéz magassága  $m = BB_1 = CC_1 = 3$ .

Jelölje  $x$  a  $CC_1$  előjeles szakasz hosszát. A  $CC_1D$  derékszögű háromszögből  $10 = 9 + x^2$ , ahonnan  $x = 1$  vagy  $x = -1$ . A feltételnek tehát két trapéz felel meg, így  $AD = 5 + \sqrt{3}$  vagy  $AD = 3 + \sqrt{3}$ . A trapézok területe tehát

$$t_1 = \frac{9 + \sqrt{3}}{2} \cdot 3 \quad \text{vagy} \quad t_2 = \frac{7 + \sqrt{3}}{2} \cdot 3$$

területegység.

7. Legyen a kiegészítő gúla magassága  $n$ , a csonkagúla magassága  $2m$ , a kimetszett síkidom területe  $\tau$ . Ismeretes, hogy ha a gúlát az alaplappal párhuzamos síkokkal metszük, akkor a kimetszett síkidomok területének aránya megegyezik a csúcstól mért távolságuk négyzetének arányával.

Ennek alkalmazásával

$$\frac{\tau}{t} = \left(\frac{n+m}{n}\right)^2 \quad \text{és} \quad \frac{T}{t} = \left(\frac{n+2m}{n}\right)^2,$$

azaz

$$\sqrt{\frac{\tau}{t}} = 1 + \frac{m}{n} \quad \text{és} \quad \sqrt{\frac{T}{t}} = 1 + 2 \cdot \frac{m}{n},$$

ahonnan

$$\sqrt{\frac{T}{t}} = 2\sqrt{\frac{\tau}{t}} - 1,$$

azaz

$$\tau = \frac{1}{4}(\sqrt{t} + \sqrt{T})^2.$$

8. Emeljük négyzetre az egyenletek mindkét oldalát, majd adjuk össze az így kapott egyenleteket:

$$1 = 2 \cos^2 x + \frac{2}{3} \sin^2 x,$$

amiből  $4 \cos^2 x = 1$ , azaz  $\cos x = \frac{1}{2}$  vagy  $\cos x = -\frac{1}{2}$ . Az egyenletrendszer megoldásai:

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,$$

$$x_2 = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi,$$

$$x_3 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,$$

$$x_4 = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi,$$

$$y_1 = \frac{\pi}{4} + 2n\pi,$$

$$y_2 = \frac{7\pi}{4} + 2n\pi,$$

$$y_3 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,$$

$$y_4 = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi,$$

ahol  $k \in \mathbb{Z}$  és  $n \in \mathbb{Z}$ .