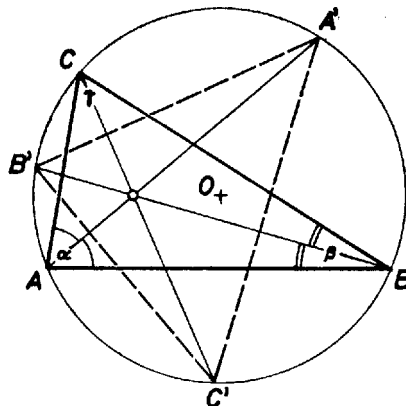


1. Az ABC háromszög területe t , köré írt körének sugara R , a belső szögfelezők a kört rendre az A' , B' , C' pontokban metszik. Az $A'B'C'$ háromszög területe T . Bizonyítsuk be, hogy $16T^3 \geq 27R^4t$. (A XXX. Nemzetközi Diákolimpiára javasolt feladat, Csehszlovákia.)



Az ábrán látható jelöléseket használva belátható, hogy $A'C'C \sphericalangle = A'AC \sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$, illetve $B'C'C \sphericalangle = B'BC \sphericalangle = \frac{\beta}{2}$, mivel ugyanahhoz a húrhoz tartozó kerületi szögekről van szó, és AA' , ill. BB' szögfelezők.

Így $A'C'B' \sphericalangle = A'C'C \sphericalangle + B'C'C \sphericalangle = \frac{\alpha + \beta}{2}$. Hasonló módon $C'B'A' \sphericalangle = \frac{\alpha + \gamma}{2}$ és $B'A'C' \sphericalangle = \frac{\beta + \gamma}{2}$.

Ennek alapján – felhasználva a háromszög területére vonatkozó ismert összefüggést –

$$T = \frac{R^2}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + \gamma) + \sin(\beta + \gamma)).$$

Az ABC háromszög területét $t = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$ alakban felírva a bizonyítandó egyenlőtlenség egy trigonometrikus egyenlőtlenséggé alakítható:

$$16 \left[\frac{R^2}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + \gamma) + \sin(\beta + \gamma)) \right]^3 \geq 27R^4 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.$$

Megfelelő egyszerűsítések, ill. átrendezés után, és felhasználva a $\sin(\alpha + \beta) = \sin \gamma$, $\sin(\alpha + \gamma) = \sin \beta$ és $\sin(\beta + \gamma) = \sin \alpha$ összefüggéseket, kapjuk a

$$\frac{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}{3} \geq \sqrt[3]{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}$$

egyenlőtlenséget. Erről könnyen látható, hogy igaz, mivel $\sin \alpha$, $\sin \beta$ és $\sin \gamma$ pozitív számok (egy háromszög szögeinek szinusza), így igaz rájuk a számtani és mértani közép közötti összefüggés.

A megoldásból következik, hogy egyenlőség akkor áll fenn, ha $\sin \alpha = \sin \beta = \sin \gamma$, azaz a háromszög szabályos.

(Nagypál Éva Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., III. o. t.)

6. Bizonyítsuk be, hogy ha $a < b$, akkor $a^3 - 3a \leq b^3 - 3b + 4$ (a, b valós). Teljesülhet-e az egyenlőség? (A XXX. Nemzetközi Diákolimpiára javasolt feladat, Svédország.)

I. megoldás. Bevezetve az $f(x) = x^3 - 3x$ jelölést, a bizonyítandó állítás (mivel $a < b$): $f(a) \leq f(b) + 4$. Vizsgáljuk az $f(x)$ függvényt!

Ennek a függvénynek a differenciálhányadosa egy tetszőleges x pontban, $x_n \rightarrow x$ ($x_n \neq x$):

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n} = \frac{x^3 - 3x - x_n^3 + 3x_n}{x - x_n} \rightarrow 3(x^2 - 1).$$

Ebből látható, hogy a differenciálhányados a $[-1, 1]$ intervallumon negatív, a $[-\infty, -1]$ és az $[1, \infty]$ intervallumon pedig pozitív. Azaz az $f(x)$ függvény a $[-1, 1]$ intervallumon monoton csökkenő, ezen kívül monoton növekvő, lokális szélsőértékei a (-1) -ben, illetve az $x = 1$ -ben vannak. Ezek alapján 3 esetet különböztetünk meg:

I. eset: $a < b \leq -1$.

Ekkor $f(a)$ és $f(b)$ is az f függvény $[-\infty, -1]$ monoton növekvő intervallumában van, így $f(a) \leq f(b)$, azaz $f(a) < f(b) + 4$.

II. eset: $1 < a < b$.

Hasonlóan mint az előbb látható, hogy $f(a) < f(b) + 4$.

III. eset: $a \leq -1$ és $b \geq 1$.

Ekkor az egyes intervallumokbeli monotonitás alapján $f(a) \leq f(-1)$, illetve $f(b) \geq f(1)$. Így $f(a) - f(b) \leq f(-1) - f(1) = 4$. Ebből $f(a) \leq f(b) + 4$.

A megoldásokból következik, hogy egyenlőség akkor áll fenn, ha $a = -1$ és $b = 1$.

II. megoldás. Mivel $a < b$, ezért bevezethetjük a $b = a + k$ jelölést, ahol k egy nem negatív valós szám. Ekkor az állítás:

$$a^3 - 3a \leq (a + k)^3 - 3(a + k) + 4.$$

Elvégezve a köbreemelést, megfelelő egyszerűsítések után a következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$0 \leq 3ka^2 + 3k^2a + k^3 - 3k + 4.$$

Osszuk el $3k$ -val, és alakítsuk át az a -t tartalmazó tagokat teljes négyzetté:

$$0 \leq \left(a + \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{k^3 - 3k + 4}{3k} - \frac{k^2}{4}.$$

Ebből, felhasználva, hogy $(k - 2)^2(k + 4) = k^3 - 12k + 16$, a

$$0 \leq \left(a + \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{(k - 2)^2(k + 4)}{12k}$$

egyenlőtlenséget kapjuk, amiről könnyen látható, hogy igaz, mivel a jobb oldalon a négyzetes tag mellett egy nemnegatív tag áll. (k nem negatív!)

Egyenlőség akkor állhat fenn, ha $\left(a + \frac{k}{2}\right)^2 = 0$ és $\frac{(k - 2)^2(k + 4)}{12k} = 0$, amiből $k = 2$, $a = -\frac{k}{2} = -1$ és $b = a + k = 1$.

(Nagypál Éva, Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., III. o. t.)