

A Bolyai János Matematikai Társulat Ifjúsági Matematikai Köre 1989. december 27–28-án tartott téli ankétjának olimpiai előkészítő feladatai.

1. Az ABC háromszög területe t ; köré írt körének sugara R , a belső szögfelezők a kört másodszor rendre az A' , B' , C' pontokban metszik. Az $A'B'C'$ háromszög területe T . Bizonyítsuk be, hogy $16 T^3 \geq 27 R^4 t$.
(Csehszlovákia)¹

2. Bizonyítsuk be, hogy a 9-es számjegyet nem tartalmazó, különböző pozitív egészek reciprokainak az összege nem lehet nagyobb 30-nál.

(Franciaország)

3. a , b , c , d olyan pozitív egészek, amelyekre $ab = cd$ és $a + b = c - d$. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan egész oldalhosszúságú derékszögű háromszög, amelynek területe ab -vel egyenlő.

(Anglia)

4. Ali Baba szőnyegkereskedő téglalap alakú szőnyeget árul. Tönkrement minden mérőeszköze, de szeretne tudni egyik szőnyegének a méreteit. Észrevette, hogy két téglalap alakú szobájában is el tudja helyezni a szőnyeget úgy, hogy a szőnyeg minden sarka hozzáérjen a szoba egy-egy falához. Mekkora a szőnyeg méretei, ha a szobák mérete 38×55 , ill. 50×55 (láb)?

(Ausztrália)

5. Legyen $0 < a < 1$ adott valós szám, és legyen f a $[0, 1]$ intervallumban folytonos függvény, amelyre $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ és minden intervallumbeli $x \leq y$ -ra

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = (1-a)f(x) + af(y)$$

teljesül. Határozzuk meg $f\left(\frac{1}{7}\right)$ -et.

(Finnország)

6. Bizonyítsuk be, hogy ha $a < b$, akkor $a^3 - 3a \leq b^3 - 3b + 4$ (a , b valós). Teljesülhet-e az egyenlőség?

(Svédország)

7. Legyen $n > 1$, egész. Értelmezzük a következő függvénysorozatot:

$$f_0(x) = 0, \quad f_1(x) = 1 - \cos x, \quad \dots, \quad f_{k+1}(x) = 2f_k(x) \cos x - f_{k-1}(x),$$

és legyen

$$F(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x).$$

Bizonyítsuk be, hogy

- a) $0 < F(x) < 1$, ha $0 < x < \pi/(n+1)$;
- b) $F(x) > 1$, ha $\pi/(n+1) < x < \pi/n$.

(USA)

8. Az ABC szabályos háromszögben a BC , CA , AB , FD , FB , DC szakaszok felezőpontjai rendre D , E , F , M , N , P . Bizonyítsuk be, hogy az AM , EN és FP szakaszok egy O ponton mennek át. Számítsuk ki az $OM : OF : ON : OE : OP : AO$ arányokat.

(Hongkong)

¹ A megjelölt országok a feladatokat a XXX. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiára javasolták.