

1. Oldja meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}\sin x &= 2 \sin y, \\ x + y &= \frac{2\pi}{3}.\end{aligned}$$

Megoldás. A második egyenletből $y = \frac{2\pi}{3} - x$, ezt az első egyenletbe helyettesítve

$$\begin{aligned}\sin x &= 2 \sin \left(\frac{2\pi}{3} - x \right), \\ \sin x &= 2 \left(\frac{2\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x \right), \\ \cos x &= 0.\end{aligned}$$

$$\text{Innen } x = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad y = \frac{\pi}{6} - n\pi, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Mivel minden átalakítás ekvivalens volt, ezért ezek valóban megoldások.

2. Oldja meg a következő egyenlőtlenségeket:

- a) $\sqrt{x^2 - 5x + 4} > -1$;
- b) $\log_{\frac{1}{2}}(4^x - 5 \cdot 2^x + 8) < -2$.

Megoldás. a) Mivel a négyzetgyökös kifejezés csak pozitív vagy nulla értéket vehet fel, ezért a megoldások egybeesnek az $x^2 - 5x + 4 \geq 0$ egyenlőtlenség megoldásaival, tehát $x \geq 4$ vagy $x \leq 1$.

- b) Az $\frac{1}{2}$ alapú logaritmus-függvény szigorú monoton csökkenése miatt

$$4^x - 5 \cdot 2^x + 8 > 4,$$

ekkor nyilván $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 > 0$, ami x -re nézve másodfokú egyenlőtlenség. Innen $2^x > 4$, $x > 2$ vagy $2^x < 1$, $x < 0$, és ezek az x -ek valóban megoldások.

3. Az ABC háromszögben $AB = \sqrt{3}$, $AC = \sqrt{2}$ egység, $BAC \sphericalangle = 75^\circ$. Az ABC háromszög köré írt köre A -t nem tartalmazó BC ívén vegyük fel az O pontot úgy, hogy $BAD \sphericalangle = 30^\circ$ legyen. Számítsa ki az AD szakasz hosszát.

Megoldás. Készítsen ábrát! Legyen r a háromszög köré írt kör sugara. Mivel $BAD \sphericalangle = 30^\circ$, ezért $DAC \sphericalangle = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ$, tehát

$$\begin{aligned}BD &= 2r \sin 30^\circ = r \quad \text{és} \\ CD &= 2r \sin 45^\circ = r\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Legyen $AD = x$. Alkalmazzuk a koszinusztételt az ABD és az ADC háromszögekben.

$$\begin{aligned}r^2 &= 3 + x^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot x \cdot \cos 30^\circ, \\ 2r^2 &= 2 + x^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot x \cdot \cos 45^\circ,\end{aligned}$$

azaz $r^2 = 3 + x^2 - 3x$, és $2r^2 = 2 + x^2 - 2x$. Innen $x = AD = 2$ egység ($r = 1$ egység).

4. Egy számtani sorozat differenciája $\frac{1}{2}$. Az első n elem összege 38, az első $n + 4$ elemé 69. Mekkora az n értéke és mennyi a sorozat első eleme?

Megoldás. Alkalmazzuk a számtani sorozatokra megismert

$$S_k = \frac{k}{2}(2a_1 + (k-1)d)$$

képletet.

$$\begin{aligned}38 &= \frac{n}{2} \left(2a_1 + (n-1) \cdot \frac{1}{2} \right), \\ 69 &= \frac{n+4}{2} \left(2a_1 + (n+3) \cdot \frac{1}{2} \right).\end{aligned}$$

A második egyenletet n -nel, az első $-(n+4)$ -gyel szorozva, majd az egyenleteket összeadva, rendezve az $n^2 - 27n + 152 = 0$ egyenlethez jutunk. Innen $n = 8$ vagy $n = 19$. Ha $n = 8$, akkor $a_1 = 3$, ha $n = 19$, akkor $a_1 = -\frac{5}{2}$, és mindkettő valóban megoldás.

5. Egy forgáskúpba beírt gömb térfogata harmada a kúp térfogatának. A gömb felszíne hányad része a kúp felszínének?

Megoldás. Legyen a forgáskúp alapkörének sugara R , magassága m , a gömb sugara r . A feltétel szerint

$$(1) \quad \begin{aligned} 3 \cdot \frac{4}{3} r^3 \pi &= \frac{R^2 \pi m}{3}, \\ 12r^3 &= R^2 m. \end{aligned}$$

Készítsük el az alakzat egy szimmetria síkmetszetét! Egyenlő szárú háromszög (alapja $2R$, magassága m a beírt körével (a kör sugara r).) Legyen a a kúp alkotójának a hossza. Hasonló háromszögek megfelelő oldalainak arányaként kapjuk, hogy

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{a}{R} &= \frac{m-r}{r}, \quad \text{ahonnan} \\ r(a+R) &= mR. \end{aligned}$$

A gömb felszíne $A_1 = 4r^2\pi$, a forgáskúp felszíne $A_2 = R\pi(R+a)$.

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{4r^2}{R(R+a)}$. A (2) és az (1) feltételek alkalmazásával

$$R(R+a) = \frac{mR^2}{r} = \frac{12r^3}{r} = 12r^2, \quad \text{így}$$

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{4r^2}{12r^2} = \frac{1}{3}$, azaz a gömb felszíne szintén harmada a kúp felszínének. (Igaz-e az állítás általánosítása n -ed részre?)

6. Az y tengellyel párhuzamos tengelyű parabola átmegy az $A(4; -7)$ ponton és érinti az $y = 1$ egyenletű egyenest. Az A pontban a parabolához húzott érintő egy normálvektora $n(8; 1)$. Írja fel a parabola egyenletét!

Megoldás. A feltételek szerint a parabola egyenlete

$$y = a(x-u)^2 + 1$$

alakban írható. Az A pont rajta van a parabolán, így

$$(1) \quad -7 = a(4-u)^2 + 1, \quad -8 = a(4-u)^2.$$

Az A pontban húzott érintő egyenlete $8x + y = 25$. Az érintő és a parabola által alkotott egyenletrendszer megoldása során kapott másodfokú egyenlet diszkriminánsa nulla.

$$\begin{aligned} y &= 25 - 8x. \\ a(x-u)^2 + 1 &= 25 - 8x, \\ ax^2 - 2(au-4)x + au^2 - 24 &= 0, \\ D = 4(au-4)^2 - 4a(au^2 - 24) &= 0. \end{aligned}$$

Ebből

$$(2) \quad a(u-3) = 2.$$

Az (1) és (2) egyenletből adódik, hogy

$$-8(u-3) = 2 \cdot (4-u)^2,$$

ahonnan $u = 2$, így $a = -2$.

A parabola egyenlete: $y = -2(x-2)^2 + 1$.

(A feladat differenciálszámítással és a parabola tulajdonságainak alkalmazásával kevesebb számítással is megoldható.)

7. Oldja meg a

$$\sqrt{x^2 + 3x + 2 + \frac{p^2}{x^2}} = x + 1 - \frac{p}{x}$$

egyenletet, ahol p valós paraméter!

Megoldás. Emeljük négyzetre az egyenlet mindkét oldalát, és vegyük figyelembe, hogy $x \neq 0$.

$$x^2 + 3x + 2 + \frac{p^2}{x^2} = x^2 + 2x + 1 - 2(x+1)\frac{p}{x} + \frac{p^2}{x^2},$$
$$(x+1)\left(1 + \frac{2p}{x}\right) = 0.$$

Az $x_1 = -1$ akkor gyöke az egyenletnek, ha kielégíti azt, azaz ha $\sqrt{p^2} = p$, tehát ha $p \geq 0$.

Az $x_2 = -2p$ akkor gyöke az egyenletnek, ha $p \neq 0$.

$$\sqrt{4p^2 - 6p + 2 + \frac{1}{4}} = -2p + \frac{3}{2}$$

és

$$\left|2p - \frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2} - 2p,$$

azaz $\frac{3}{2} - 2p \geq 0$, $p \leq \frac{3}{4}$. Összefoglalva:

1. Ha $p < 0$, akkor az egyenlet megoldása x_2 .

2. Ha $p = 0$, akkor a megoldás x_1 .

3. Ha $0 < p \leq \frac{3}{4}$, akkor a megoldások x_1 , x_2 .

4. Ha $p > \frac{3}{4}$ akkor a megoldás x_1 .

8. Legyen az ABC háromszög kerülete $2s = 24$ egység. Húzzuk meg a beírt körének az oldalakkal párhuzamos érintőit. Ezen érintőknek a háromszögön belül eső szakaszai közül válasszuk ki a legnagyobbat. Mely ABC háromszög esetén lesz ez az érintőszakasz a lehető legnagyobb?

Megoldás. Rajzoljuk meg az ABC háromszöget a beírt körével, és a BC oldallal (jelölje a) párhuzamos érintőszakasszal, ezt jelölje x .

A külső pontból húzott érintő szakaszok egyenlőségéből következik, hogy a beírt érintőszakasz által lemetezett háromszög kerülete $2(12 - a)$ (általában $2(s - a)$). A lemetezett és az adott háromszög hasonlóságából

$$\frac{x}{a} = \frac{2(12 - a)}{24},$$
$$x = \frac{1}{12}a(12 - a).$$

x akkor a legnagyobb, ha $a = 6$, ami az

$$x = \frac{1}{12}(36 - (a - 6)^2)$$

alakból megállapítható. Ha $a = 6$, akkor $x = 3$.

Ilyen háromszög létezik, hiszen ekkor $b + c = 18$, $6 = a$.