

$$1. \quad \log_2^{\sin 750^\circ} \left(\frac{1}{2} \right)^{-2} = \sqrt{2}$$

$$\lg (\cos 0^\circ + \cos 36^\circ + \dots + \cos 144^\circ) = \lg 1 = 0$$

$$\cos^{16} 1990^\circ = (-\cos 10^\circ)^{16}, \quad \text{azonban} \quad 0 < (-\cos 10^\circ)^{16} < 1.$$

2. 6,25%.

3. A mértani sorozat: $-\frac{1}{q^2}, -\frac{2}{q}, -2$.

A számtani sorozat: $-2, -\frac{2}{q^2}, -\frac{q}{2}$.

A számtani sorozat definíciója szerint a szomszédos tagok különbségére egy egyenletet írhatunk fel, amiből a

$$(q-1)(q+2) = 0$$

egyenletet kapjuk.

A három szám $-2, -2, -2$ vagy $-2, 1, -2$.

4. A feladat értelmezési tartománya: $x < 1$, vagy $3 < x$. Az egyenlet másodfokú, így

a) Ha $\log_2(x^2 - 4x + 3) = 3$, akkor

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$x_1 = -1; \quad x_2 = 5.$$

b) Ha $\log_2(x^2 - 4x + 3) = \log_2 15$, akkor

$$x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$x_3 = -2; \quad x_4 = 6.$$

Mind a négy gyököt tartalmazza az értelmezési tartomány.

5. $x = 0$ nyilván nem lehet, így $x^4 + x^2 + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^2} = 4(1 - 2^y)$.

A bal oldal két pozitív szám és reciprokanak összege, ezért a bal oldal ≥ 4 , a jobb oldal < 4 , nincs valós számpár, amely kielégíti az egyenletet.

6. A kör egyenlete:

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 25,$$

A paraboláé:

$$y = (x-1)^2 - 3,$$

Innen:

$$x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = 0.$$

Bontsuk szorzattá (ha van egész zérushely, akkor az 12 osztója):

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x+2) = 0.$$

A metszéspontok: $P_1(1; -3)$, $P_2(2; -2)$, $P_3(3; 1)$, $P_4(-2; 6)$.

7. Két olyan háromszögbe, amelynek van közös oldala, nem rajzolhatunk téglalapot, mert ekkor csak ötszög keletkezhetne. Tegyük fel, hogy P_7 az AM egyenes azon pontja, amelyre $P_6P_7 \parallel DM$. Megmutatjuk, hogy $P_1 \equiv P_7$.

$$\frac{AP_1}{P_1M} = \frac{BP_2}{P_2M} = \frac{BP_2}{P_3P_4} = \frac{P_2P_3}{P_4C} = \frac{MP_4}{P_4C} = \frac{MP_5}{P_5D} = \frac{P_7P_6}{P_5D} = \frac{AP_7}{P_6P_5} = \frac{AP_7}{P_7M}.$$

8. A mértani és a számtani közép közötti összefüggést felírva

$$(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) \leq \left(\frac{\alpha + \beta + \beta + \gamma + \gamma + \alpha}{3} \right)^3.$$

A jobb oldal azonban $(2\pi/3)^3$.