

1. Oldja meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}\sin x &= 2 \sin y, \\ x + y &= \frac{2\pi}{3}.\end{aligned}$$

2. Oldja meg a következő egyenlőtlenségeket:

a) $\sqrt{x^2 - 5x + 4} > -1$;

b) $\log_{\frac{1}{2}}(4^x - 5 \cdot 2^x + 8) < -2$.

3. Az ABC háromszögben $AB = \sqrt{3}$, $AC = \sqrt{2}$ egység, $BAC = 75^\circ$. A körülírt kör A -t nem tartalmazó BC ívén vegyük fel a D pontot úgy, hogy $BAD = 30^\circ$ legyen. Számítsa ki az AD szakasz hosszát!

4. Egy számtani sorozat differenciája $1/2$. Az első n elem összege 38 , az első $n + 4$ elem összege 69 . Mekkora az n értéke, és mennyi a sorozat első eleme?

5. Egy forgáskúpba beírt gömb térfogata harmada a kúp térfogatának. A gömb felszíne hányadrésze a kúp felszínének?

6. Az y tengellyel párhuzamos tengelyű parabola átmegy az $A(4; -7)$ ponton és érinti az $y = 1$ egyenletű egyenest. Az A pontban a parabolához húzott érintő egy normálvektora $n(8; 1)$. Írja fel a parabola egyenletét!

7. Oldja meg a

$$\sqrt{x^2 + 3x + 2 + \frac{p^2}{x^2}} = x + 1 - \frac{p}{x}$$

egyenletet, ahol p valós paraméter!

8. Legyen az ABC háromszög kerülete $2s = 24$ egység. Húzzuk meg beírt körének az oldalakkal párhuzamos érintőit. Ezen érintőknek a háromszögön belül eső szakaszai közül válasszuk ki a legnagyobbat. Mely ABC háromszög esetén lesz ez az érintőszakasz a lehető legnagyobb?