

Ebben a cikkben egy olyan – rendhagyónak nevezhető –függvénnyel foglalkozunk, amelyet számjegyek átlagának segítségével értelmezünk.

Az egyszerűség kedvéért a számokat nem tizedes, hanem kettes (diadikus) tört alakban kezeljük. A 10-es alaphoz hasonlóan itt is igaz, hogy minden valós x szám felírható

$$x = \pm \beta_k \beta_{k-1} \dots \beta_1 \beta_0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots$$

kettes tört alakban, ahol a β_i, α_j számjegyek értéke 0 vagy 1 lehet. Ez a felírás egyértelművé tehető azzal, ha megtiltjuk, hogy a kettes jegyek valahonnan kezdve csupa 1-esek legyenek; azaz

$$\beta_k \beta_{k-1} \dots \beta_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_t, 111 \dots$$

helyett mindig a

$$\beta_k \beta_{k-1} \dots \beta_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_t + \frac{1}{2^t}$$

eredményeként adódó „véges” alakot használjuk.

Könnyen értelmezhetjük egy 0 és 1 közé eső diadikus tört első n jegyének átlagát: legyen

$$x = 0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \text{-re} \quad S_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

A g függvény minden ilyen x helyen vegye fel a

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$$

értéket, amennyiben ez a határérték létezik. Ezzel a g függvényt a $[0, 1]$ intervallum valamely részhalmazán értelmeztük. (Látható, hogy $0 \leq S_n(x) \leq 1$, így $0 \leq g(x) \leq 1$.)

Elsőként azt vizsgáljuk meg, van-e olyan y szám, melyre $g(y) = y$, vagyis y megegyezik saját számjegyeinek az átlagával. Ezután g értelmezési tartományának a „nagyságát” határozzuk meg, majd igazoljuk, hogy g értéke „majdnem mindig” $\frac{1}{2}$.

1. Legyen $0 \leq a < b \leq 1$. Tegyük fel, hogy az f függvény folytonos az $[a, b]$ intervallumon, és itt minden x -re $0 \leq f(x) \leq 1$. Megmutatjuk, hogy ekkor létezik olyan y ($[a, b]$ -ben), melyre $f(y) = g(y)$. (Speciálisan az $f(x) = x$ függvényre kapjuk, hogy alkalmas y -ra $g(y) = y$ teljesül.)

Előállítjuk a kívánt tulajdonságú y számot. Mivel $b - a$ pozitív, ezért alkalmas n természetes számra $2 \cdot \frac{1}{2^n} < b - a$.

A $0, \frac{1}{2^n}, 2 \cdot \frac{1}{2^n}, 3 \cdot \frac{1}{2^n}, \dots$ számsorozatnak így legalább két szomszédos eleme az (a, b) nyílt intervallumba esik; jelölje ezek kisebbikét x_n . Ekkor nyilván

$$(1) \quad x_n = 0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \quad \text{és} \quad a < x_n < x_n + \frac{1}{2^n} < b.$$

Ezután rekurzíven definiáljuk az $x_n, x_{n+1}, \dots$ végtelen sorozatot, úgy, hogy x_{k+1} , az x_k -ből egy további kettesjegy hozzáírásával keletkezzen a következőképpen: Ha $x_k = 0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k$, akkor legyen $x_{k+1} = 0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \alpha_{k+1}$, ahol $\alpha_{k+1} = 1$, ha $S_k(x_k) < f(x_k)$, ill. $\alpha_{k+1} = 0$, ha $S_k(x_k) \geq f(x_k)$. Ha x_n után tetszőleges 0–1 sorozatot írunk, (1) szerint a kapott szám is $[a, b]$ -ben lesz; ezért $a < x_n < x_{n+1} < \dots \leq b$. Legyen $y = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$, ekkor $a < y \leq b$, és az f függvény folytonossága következtében $f(y) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k)$. Megmutatjuk, hogy $f(y) = g(y)$. Ehhez azt kell belátni, hogy minden ε pozitív számhoz található olyan m , amellyel minden m -nél nagyobb k természetes számra $|S_k(y) - f(y)| \leq \varepsilon$. Legyen tehát ε egy ilyen rögzített pozitív érték. Mivel $f(y)$ az $f(x_k)$ sorozat határértéke, azért van olyan m_0 , hogy

$$(2) \quad f(y) - \frac{\varepsilon}{2} < f(x_k) < f(y) + \frac{\varepsilon}{2}$$

minden m_0 -nál nagyobb k -ra.

Belátjuk továbbá, hogy ha $k > \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}$, akkor

$$(3) \quad |S_{k+1}(y) - S_k(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

is teljesül. Ha ugyanis $\alpha_{k+1} = 0$, akkor

$$|S_{k+1}(y) - S_k(y)| = \left| S_k(y) \frac{k}{k+1} - S_k(y) \right| = S_k(y) \cdot \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k+1} < \varepsilon.$$

Ezután bebizonyítjuk, hogy létezik olyan $\left(m_0\text{-nál és } \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\text{-nál nagyobb}\right) m$ természetes szám, amelyre

$$(4) \quad f(y) - \frac{\varepsilon}{2} < S_m(y) < f(y) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ha ilyen m nem létezne, akkor (3) miatt vagy minden – elég nagy – k -ra $S_k(y) \leq f(y) - \frac{\varepsilon}{2}$, vagy minden – elég nagy – k -ra $S_k(y) \geq f(y) + \frac{\varepsilon}{2}$ állna fenn. Az első esetben azonban $\alpha_{k+1} = 1$ következtében $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k(y) = 1$, így $f(y) - \frac{\varepsilon}{2} \geq 1$, ami az f -re tett feltevésünknek ellentmond. A második esetben ugyanígy $\alpha_{k+1} = 0$ miatt $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k(y) = 0$, amiből $0 \geq f(y) + \frac{\varepsilon}{2}$, szintén ellentmondás.

Az így kapott m számra most már igazolhatjuk, hogy

$$|S_k(y) - f(y)| \leq \varepsilon, \quad \text{ha } k > m.$$

Ennek bizonyítását indirekt úton végezzük el. Tegyük fel, hogy a kívánt egyenlőtlenség nem teljesül minden, m -nél nagyobb k -ra; legyen k a legkisebb olyan természetes szám, melyre $k > m$ és $|S_k(y) - f(y)| > \varepsilon$. Ez utóbbi egyenlőtlenség kétféleképpen valósulhat meg.

1 eset: $S_k(y) > f(y) + \varepsilon$. Mivel a k számot a lehető legkisebbnek választottuk, ezért (és (4) miatt, ha $k = m + 1$)

$$(5) \quad S_{k-1}(y) < f(y) + \varepsilon$$

(3) miatt viszont esetünkben

$$(6) \quad S_{k-1}(y) > f(y) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

tehát (2), (6) és (5) egybevetéséből

$$(7) \quad f(x_{k-1}) < f(y) + \frac{\varepsilon}{2} < S_{k-1}(y) = S_{k-1}(x_{k-1})$$

és

$$(8) \quad S_{k-1}(x_{k-1}) = S_{k-1}(y) < f(y) + \varepsilon < S_k(y) = S_k(x_k).$$

Definíciónk (7) alapján az $\alpha_k = 0$ jegyet adja, ekkor azonban $S_k(x_k) \leq S_{k-1}(x_{k-1})$, ami ellentmond (8)-nak.

2. eset: $S_k(y) < f(y) - \varepsilon$. A k minimalitása folytán most

$$(5') \quad S_{k-1}(y) > f(y) - \varepsilon,$$

míg (3) miatt ezúttal

$$(6') \quad S_{k-1}(y) < f(y) - \frac{\varepsilon}{2},$$

tehát (2), (6') és (5') értelmében

$$(7') \quad f(x_{k-1}) > f(y) - \frac{\varepsilon}{2} > S_{k-1}(y) = S_{k-1}(x_{k-1})$$

és

$$(8') \quad S_{k-1}(x_{k-1}) = S_{k-1}(y) > f(y) - \varepsilon > S_k(x_k).$$

A (7') következtében $\alpha_k = 1$, így $S_k(x_k) \geq S_{k-1}(x_{k-1})$; ez ellentmond (8')-nek.

Mivel az ε bármilyen (kicsi) pozitív szám lehet, ezért valóban $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k(y) = f(y)$.

2. $[0, 1]$ -ben g értelmezési tartománya, valamint azon pontok halmaza, melyekben g nem értelmezett, egyaránt kontinuum számosságú.

A) Az előző részben bizonyított tételt az $f(x) = c$, $(0 \leq c \leq 1)$ konstans függvényekre alkalmazva azt kapjuk, hogy g minden $[0, 1]$ -beli értéket fölvesz, így az értelmezési tartománya is (legalább) kontinuum számosságú.

B) Tegyük fel ezután, hogy az $x = 0, \alpha_1 \alpha_2 \dots$ helyen g nincs értelmezve. Változtassuk meg x néhány négyzetszám sorszámú helyen álló kettedesjegyét. Megmutatjuk, hogy az így létrejövő y helyen sem értelmes a g függvény. Tegyük fel ugyanis, hogy $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k(y)$ létezik. A

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i = k S_k(x) \quad \text{és} \quad k S_k(y)$$

összegek legfeljebb az 1., 4., 9., ... t^2 -edik helyeken különbözhetnek egymástól, ahol $t^2 \leq k$. Így

$$|kS_k(x) - kS_k(y)| \leq \sum_{i=1}^t 1 = t \leq \sqrt{k},$$

ezért

$$|S_k(x) - S_k(y)| \leq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Ekkor azonban $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k(x) - S_k(y) = 0$, következésképpen $S_k(x)$ is konvergens lenne; ennek az ellenkezőjét tettük fel, tehát $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k(y)$ sem létezik.

Az így kapható y számok számossága megegyezik a (végtelen) 0–1 sorozatok számosságával, hiszen éppen egy ilyen sorozattal jelölhető ki, hogy mely számok négyzeteinek megfelelő helyen változtatjuk meg x -et: a sorozat i -edik eleme pontosan akkor legyen 1-es, ha az i^2 -edik kettősjegy változik.

Ha tehát megadunk legalább egy olyan x -et, amelyre az $S_k(x)$ sorozatnak nincs határértéke, akkor a g függvény (legalább) kontinuum számosságú helyen nincs értelmezve $[0, 1]$ -ben. Egy megfelelő szám a következő: $x = 0, 1001111000000001 \dots$, ahol rendre $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \dots$ darab 1-es, ill. 0 számjegy követi egymást felváltva. Könnyen látható, hogy minden k -ra

$$S_{4^k-1}(x) = \frac{1}{4^k-1}(1 + 2^2 + 2^4 + \dots + 2^{2k-2}) = \frac{1}{3},$$

és

$$S_{2^{2k+1}}(x) = \frac{1}{2^{2k+1}-1}(1 + 2^2 + 2^4 + \dots + 2^{2k}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2^{2k+2}-1}{2^{2k+1}-1} > \frac{2}{3},$$

tehát az $S_n(x)$ sorozatnak valóban nem létezik határértéke.

3. Végetelül megmutatjuk, hogy $g(x)$ értéke 1 valószínűséggel $\frac{1}{2}$, azaz a $[0, 1]$ intervallumból véletlenszerűen választott x helyen $g(x)$ értéke 0 valószínűséggel tér el $\frac{1}{2}$ -től – ide számítva azt az esetet is, hogy $g(x)$ nem értelmezett.

Jelöljük H -val azoknak a $[0, 1]$ -beli számoknak a halmazát, amelyekben g nem értelmezett vagy az értéke nem $\frac{1}{2}$. Azt fogjuk megmutatni, hogy H nullmértékű, azaz tetszőleges pozitív ε esetén H lefedhető olyan intervallumokkal, amelyek összhosszúsága legfeljebb ε .

Nullmértékű például minden olyan halmaz, amelynek véges sok vagy megszámlálhatóan végtelen sok pontja van. Ez a következőképpen látható be: Rendezzük sorba a halmaz elemeit, és a sorban az n -edik elemet fedjük le egy $\frac{\varepsilon}{2^n}$ hosszúságú intervallummal; ezzel a halmazt lefedjük egy legfeljebb $\varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \varepsilon$ hosszúságú intervallumrendszerrel.

Megszámlálható sok nullmértékű halmaz egyesítése is nullmértékű. Ha ugyanis e halmazok $V_1, V_2, \dots$, és $\varepsilon > 0$, akkor V_n -et $\frac{\varepsilon}{2^n}$ összhosszúságú intervallumrendszerrel lefedve, majd a lefedéseket egyesítve a $V_1, V_2, \dots$ halmazok egyesítését lefedő, ε összhosszúságú intervallumrendszerhez jutunk.

Az iménti előkészületek után térjünk vissza H vizsgálatához; legyen ε egy (a továbbiak során rögzítettnek tekintett) pozitív szám. Jelölje H_ε azoknak a $[0, 1]$ -beli x értékeknek a halmazát, melyekre az $\left| S_n(x) - \frac{1}{2} \right| > \varepsilon$ egyenlőtlenség végtelen sok n -re teljesül. Ha n egy ilyen szám, akkor legyen k a legnagyobb olyan egész, amelyre $\frac{1}{2} - \frac{k}{n} > \varepsilon$. Ha $\left| S_n(x) - \frac{1}{2} \right| > \varepsilon$, akkor x első n tizedesjegye között az 1-esek száma 0, 1, ..., k , vagy $n, n-1, \dots, n-k$ lehet. t darab 1-es esetén ugyanis $t < \frac{n}{2}$ -re

$$\left| S_n(x) - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} - \frac{t}{n},$$

míg $t > \frac{n}{2}$ -re $t = n - t'$ és

$$\left| S_n(x) - \frac{1}{2} \right| = \frac{t}{n} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{t'}{n}.$$

A t darab 1-es $\binom{n}{t}$ -féleképpen helyezkedhet el az első n számjegy között, és bármelyik ilyen elhelyezéshez tartozó x számok egy $\frac{1}{2^n}$ hosszúságú intervallumnak a pontjai. (Egy $x = 0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \alpha_{n+1} \dots$ tört ugyanis pontosan akkor

ilyen, ha $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ éppen a kívánt elhelyezés, az $\alpha_{n+1} \alpha_{n+2} \dots$ rész pedig tetszőleges, azaz $0, 0 \dots 0, \alpha_{n+1} \alpha_{n+2} \dots$ a $\left[0, \frac{1}{2^n}\right]$ intervallum egyik pontja.) Az $\left|S_n(x) - \frac{1}{2}\right| > \varepsilon$ feltételnek eleget tevő pontok tehát lefedhetők az

$$a_n = \frac{1}{2^n} \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{k} + \binom{n}{n-k} + \dots + \binom{n}{n} \right]$$

összhosszúságú H_ε^n intervallumrendszerrel. Becsüljük meg a_n nagyságát! Ha $0 < y < 1$, akkor a binominális tétel értelmében

$$\begin{aligned} (1+y)^n &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}y + \dots + \binom{n}{k}y^k + \dots + \binom{n}{n}y^n > \\ &> \binom{n}{0}y^k + \binom{n}{1}y^k + \dots + \binom{n}{k}y^k = 2^{n-1}a_n y^k, \end{aligned}$$

azaz

$$a_n < \frac{(1+y)^n}{2^{n-1}y^k} < \frac{(1+y)^n}{2^{n-1}y^{\frac{n}{2}-n\varepsilon}} = 2 \left(\frac{1+y}{2y^{\frac{1}{2}-\varepsilon}} \right)^n = 2 \left(\frac{1}{2} y^{\varepsilon-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} y^{\varepsilon+\frac{1}{2}} \right)^n.$$

Az $r(y) = \frac{1}{2} y^{\varepsilon-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} y^{\varepsilon+\frac{1}{2}}$ függvény deriváltja:

$$r'(y) = \frac{1}{2} \left(\varepsilon - \frac{1}{2} \right) y^{\varepsilon-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \left(\varepsilon + \frac{1}{2} \right) y^{\varepsilon-\frac{1}{2}}.$$

Mivel $r(1) = 1$ és $r'(1) = \varepsilon > 0$, ezért van olyan y_1 hely a $(0, 1)$ nyílt intervallumban, amelyre $r(y_1) < 1$. Jelölje az $r(y_1)$ értéket v ; ekkor

$$a_n < 2v^n.$$

Legyen β tetszőleges pozitív szám, és válasszuk n -et olyan nagynak, amelyre már

$$0 < 2 \frac{v^n}{1-v} < \beta$$

(ez megtehető, hiszen $0 < v < 1$). Ezzel az n -nel a $H_\varepsilon^n, H_\varepsilon^{n+1}, \dots$ intervallumrendszerek egyesítésének összhossza legfeljebb

$$a_n + a_{n+1} \dots < 2(v^n + v^{n+1} + \dots) = \frac{2v^n}{1-v} < \beta.$$

A $H_\varepsilon^n, H_\varepsilon^{n+1}, \dots$ intervallumrendszerek egyesítése lefedi a H_ε halmazt. Ha ugyanis x a H_ε egyik pontja, akkor léteznie kell olyan, n -nél nem kisebb k értéknek, amelyre $\left|S_k(x) - \frac{1}{2}\right| > \varepsilon$, hiszen ellenkező esetben x csak véges sok m -re

elégit ki az $\left|S_m(x) - \frac{1}{2}\right| > \varepsilon$ egyenlőtlenséget. H_ε tehát lefedhető egy legfeljebb β összhosszúságú intervallumrendszerrel; mivel β tetszőlegesen kicsi lehet, ezért H_ε nullmértékű halmaz. Ily módon pl. $H_{1/2^n}$ is nullmértékű, tehát a $H_{1/2}, H_{1/2^2}, H_{1/2^3}, \dots$ halmazok W egyesítése is nullmértékű. Végezetül megmutatjuk, hogy W lefedi H -t (ekkor persze $W = H$), így H is nullmértékű. Tegyük fel, hogy x a $H_{1/2^n}$ halmazok egyikében sincs benne. Ez azt jelenti,

hogy mindegyik n természetes számra az $\left|S_k(x) - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2^n}$ egyenlőtlenség csak véges sok k -ra teljesül. Így minden n -re

létezik olyan k_n , hogy valamennyi, k_n -nél nagyobb k egészre $\left|S_k(x) - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2^n}$, tehát

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k(x) = \frac{1}{2}, \quad \text{azaz} \quad g(x) = \frac{1}{2};$$

vagyis x nincs benne H -ban sem. Eszerint H része W -nek.