

Első forduló

I. és II. kategória

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán a

$$2\sqrt{x-2} + \sqrt{x+2} = 4\sqrt[4]{x^2-4}$$

egyenletet.

2. Húzzunk érintőket a k körhöz a rajta kívül levő A pontból. Az érintési pontok legyenek B és C . Húzzunk merőlegeseket a k kör tetszőleges pontjából a BC , CA és AB egyenesekre. A merőlegesek talppontjai rendre A_1, B_1 , és C_1 , ahol $A_1 \in BC, B_1 \in CA$ és $C_1 \in AB$.

Bizonyítsuk be, hogy PA_1 mértani közepe PB_1 -nek és PC_1 -nek.

3. Egy 8×8 -as sakktábla mezőire írjuk be sorban 1-től kezdve a természetes számokat a bal felső sarokból indulva jobbra, majd folytatva a második sorban ugyancsak balról jobbra és így tovább.

Helyezzünk a sakktábla mezőire olyan összefüggő, három kis négyzetből álló alakzatokat, amelyekben nem mind a három négyzet esik egy sorba vagy egy oszlopba. Hány olyan ráhelyezés létezik, amelyben a lefedett mezőkben lévő számok összege osztható 3-mal?

4. Az x valós szám mely értékére van minimuma az

$$f(x) = \sqrt{2x^2 - 6x + 9} + \sqrt{2x^2 + 6x + 9}$$

függvénynek?

5. Egy fából készült téglatest alapéleinek aránya $3 : 4$, valamennyi élének hossza együttevén 176 cm. Szétfűrészeljük a testet három szimmetriasíkja mentén, valamint a szemben lévő oldalélpárokkal meghatározott síkok mentén. Az így létrejövő testek összes felszíne háromszor akkora, mint az eredeti test felszíne.

Mekkorák a test élei?

6. Van-e olyan szabályos sokszög, amelyben a leghosszabb és a legrövidebb átló mérőszámának a különbsége egyenlő az oldal mérőszámával?

III–IV. Kategória

1. Egy település lakóinak száma négyzetszám volt. 1000 fővel növekedett a lakosok száma, ekkor egy négyzetszámnál 1-gyel több lett. Újabb 1000 fővel növekedve ismét négyzetszám lett.

Mennyi volt eredetileg a lakosok száma?

2. Az $A_1, A_2, \dots, A_{12}$ egységnyi területű szabályos tizenkétszög O középpontját tükrözzük az A_1A_2, A_5A_6 és A_9A_{10} egyenesekre. Számítsuk ki az így kapott pontok által meghatározott háromszög területét.

3. A PQR háromszög oldalainak hossza p, q, r . A háromszögről tudjuk, hogy ha n tetszőleges pozitív egész szám, akkor van olyan háromszög, amelynek oldalai p^n, q^n, r^n . Bizonyítsuk be, hogy a háromszög egyenlő szárú.

4. Határozzuk meg

$$\sin x_1 \cdot \sin x_2 \cdot \dots \cdot \sin x_n$$

maximális értékét, ha $x_1, x_2, \dots, x_n$ olyan valós számok, amelyekre teljesül, hogy

$$\operatorname{tg} x_1 \cdot \operatorname{tg} x_2 \cdot \dots \cdot \operatorname{tg} x_n = 1.$$

5. Az ABC háromszög köré írt körének középpontja O , a kör csúcsot nem tartalmazó AB, BC, CA ívének felező-pontja rendre C_1, A_1, B_1 .

Bizonyítsuk be, hogy ha

$$\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1},$$

akkor K az ABC háromszögbe írt kör középpontja.

A második (döntő) forduló feladatai

I. kategória

(Szakközépiskolák tanulói részére)

1. Az x, y és z valós számokra teljesülnek a következő összefüggések:

$$x + y = z - 1$$

$$xy = z^2 - 7x + 14.$$

Mely z érték esetén lesz az $x^2 + y^2$ összeg értéke maximális?

2. Oldjuk meg a

$$\left| \sin x - \frac{\sin x}{x} \right| + 2 \cdot \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) + \frac{\sin x}{x} = 3$$

egyenletet, ahol $x \neq 0$ és $x \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right]$.

3. Az ABC hegyesszögű egyenlő szárú háromszög BC alapjának C végpontja körül $\frac{1}{2}BC$ sugárral kört rajzolunk, amely az AC oldalt D pontban metszi. Kössük össze a háromszög köré írható kör C -t nem tartalmazó AB ívének tetszőleges belső P pontját C -vel, majd húzzunk párhuzamost a D ponton át PC -vel. Ez az egyenes a PA egyenest a Q pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy $PQ = \frac{1}{2}(PC - PB)$.

Hogyan változik a feladat állítása, ha P a körvonal tetszőleges pontja?

II. kategória

(Alaptantervű gimnáziumi osztályok tanulói részére)

1. Bizonyítsuk be, hogy bármely tíz, egymást követő pozitív egész szám közül legalább egy relatív prím a többi mindegyikéhez.

2. Az ABC háromszögben $AB = AC$. A háromszög beírt körének középpontja legyen O . A BAC szög szárait és az ABC háromszög köré írt kört belülről érintő kör az AB oldalt a P pontban, az AC oldalt a Q pontban érinti. Bizonyítsuk be, hogy az O középpont rajta van a PQ szakaszon.

3. Bizonyítsuk be, hogy ha n tetszés szerinti, 3-nál nem kisebb természetes számot jelöl, akkor

$$\frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{12}.$$

III. Kategória

(Fakultatív matematikai osztályok tanulói részére)

1. Igazoljuk, hogy ha $a, b, c > 0$ valós számok, akkor

$$\sqrt{a^2 + b^2 - ab} + \sqrt{b^2 + c^2 - bc} \geq \sqrt{a^2 + c^2 + ac}.$$

2. Jelölje $\Pi(n)$ az n pozitív egész pozitív osztóinak szorzatát (pl.: $\Pi(3) = 3$, $\Pi(4) = 8$). Igazolja, hogy ha $\Pi(m) = \Pi n$, akkor $m = n$.

3. Az ABC háromszögben $\angle ACB = \gamma > \angle ABC = \beta > \angle BAC = \alpha$. Bizonyítsa be, hogy az ABC háromszög beírható körének I középpontja a BOM háromszög belsejében van (O az ABC háromszög köré írt kör középpontja, M pedig a magasságpont).

IV. kategória

(A gimnáziumok speciális matematikai osztályai)

1. Hány oldalú (konvex) szabályos sokszögekre igaz, hogy az oldalhosszuk $A_i A_{i+1}$ az $A_i A_{i+2}$ és $A_i A_{i+3}$ átlóhosszak harmonikus közepének a fele, ahol a sokszög csúcsai rendre $A_1, A_2, A_3, \dots$?

2. Bizonyítsuk be, hogy 13 különböző valós szám között mindig van két olyan (jelölje ezeket c és d), amelyekre

$$0 < \frac{c-d}{1+cd} < 2 - \sqrt{3}.$$

3. Határozza meg az

$$x^2 - 2y^4 = 1$$

egyenlet összes egész megoldásait.