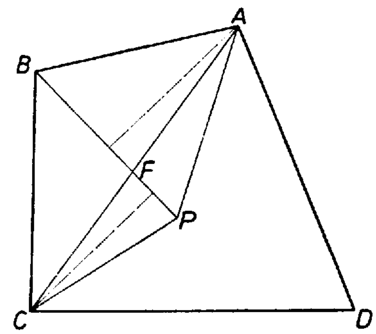
1. *Bizonyítsuk be, hogy ha az $ABCD$ konvex négyszög belsejében van olyan P pont, hogy a PAB, PBC, PCD, PDA háromszögek egyenlő területűek, akkor a négyszög valamelyik átlója felezi a négyszög területét.*

I. megoldás. Azt mutatjuk meg, hogy ha van a feladatban leírt tulajdonságú P pont, akkor az az egyik átlón van (az átló felezőpontja). Ebből következik a feladat állítása, mert ha P például a BD átlón van, akkor a BCD háromszög a PBC és a PCD háromszög egyesítése. A részháromszögek területe a négyszög területének negyedrésze, így a BD átló két egyenlő területű részre osztja a négyszöget.

A továbbiakban egy $KL\dots V$ sokszög területét $\tau_{KL\dots V}$-vel fogjuk jelölni.



1. ábra

Mivel τ_{ABP} és τ_{BPC} egyenlő, és a két háromszög BP oldala közös, így a rá merőleges magasságok is egyenlők. A és C tehát egyenlő távol van a BP egyenestől, annak két oldalán (1. ábra). Ebből következik, hogy az egyenes átmegy az AC átló F felezőpontján. Ugyanígy nyerjük, hogy DP is átmegy F-en. Ha a két egyenes különböző, akkor csak egy metszéspontjuk van, így P azonos F-fel, vagyis P az AC átlón van. Ha viszont a két egyenes egybeesik, akkor ez az egyenes a BD átló egyenese, tehát ekkor P a BD átlón van. Ezzel a feladatot megoldottuk.

Megjegyzések. 1. Nyilvánvalóan igaz a feladat állításának a megfordítása: Ha valamelyik átló felezi a négyszög területét, akkor van olyan P pont a négyszög belsejében, amelyikre

$$\tau_{ABP} = \tau_{BCP} = \tau_{CDP} = \tau_{DAP}.$$

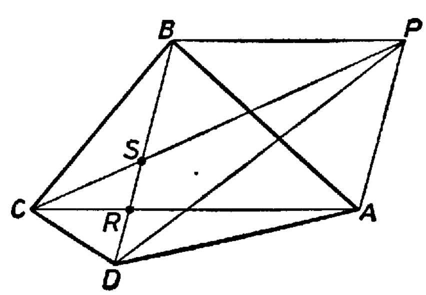
Nyilván ilyen pont a területet felező átló felezőpontja.

2. Az utolsó mondatban mondhattuk volna: „ez a pont ...", mert legfeljebb egy ilyen pont lehet a négyszög belsejében. Ha ugyanis a P pontra a 4 háromszög területe egyenlő és egy P' pont pl. az ABP háromszög P-től különböző pontja, akkor

$$\tau_{ABP'} < \tau_{ABP},$$

így P'-re nem teljesülhetnek a megfelelő egyenlőségek.

3. Lényeges az a kikötés, hogy a P pont a négyszög belsejében legyen, ugyanis létezhet a négyszögön kívül is olyan pont, amelyikre a négy háromszög területe ugyanakkora. Induljunk ki egy $APBR$ paralelogrammából. A BR oldalon válasszunk ki egy S pontot R-hez közelebb, mint B-hez. Legyen C a PS és AR egyenes metszéspontja, D pedig B-nek az S-re vonatkozó tükörképe (2. ábra).

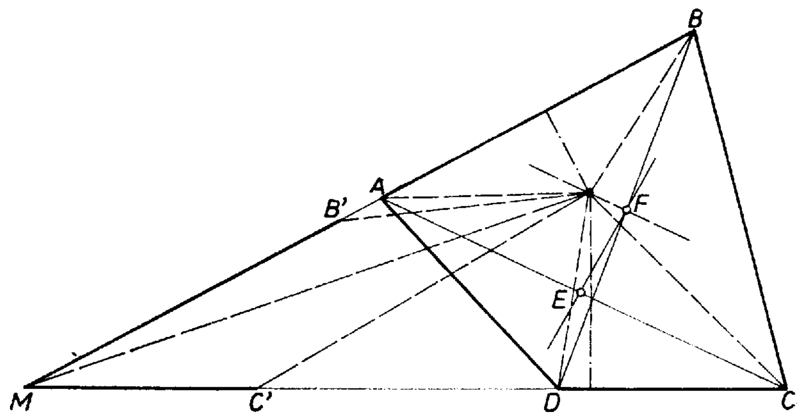


2. ábra

S választása folytán C az AR szakasz R-en túli meghosszabbításán van, D pedig BR-nek az R-en túli meghosszabbításán, tehát az $ABCD$ négyszög konvex. Ekkor könnyen látható, hogy a PDA, PAB, PBC, PCD háromszögek területe egyenlő, viszont P nincs rajta egyik átlón sem.

Belátható, hogy minden ellenpélda ilyen felépítésű, annak alapján, hogy ha két háromszög területe egyenlő és egy oldaluk közös, akkor a közös oldal egyenese vagy felezi a harmadik csúcsokat összekötő szakaszt, vagy párhuzamos vele.

II. megoldás: Paralelogrammák esetén egyrészt az átlók metszéspontja megfelel P pontnak, másrészt mind a két átló felezi a négyszög területét, tehát a feladat állítása igaz. A továbbiakban paralelogrammáktól különböző négyszögekre szorítkozunk. Tegyük fel, hogy AB és CD nem párhuzamos.



3. ábra

Ha egy P pontra teljesülnek a feladat feltételei, akkor az $ABCP$ négyszög területe az adott négyszög területének a fele. Az olyan P pontok, amelyektől csak ennek teljesülését kívánjuk meg, egy AC-vel párhuzamos egyenesen vannak, mert az ABC háromszög területe nem függ a P pont helyzetétől, így az ACP háromszög területének is egy megadott értéknek kell lennie (3. ábra). Ez az egyenes lehet AC bármelyik oldalán, vagy lehet az átló egyenese is. A BD átlót ez az egyenes az F felezőpontjában metszi, mert

$$\tau_{ABF} = \frac{1}{2}\tau_{ABD} \quad \text{és} \quad \tau_{BCF} = \frac{1}{2}\tau_{BCD},$$

a jobb oldalon szereplő háromszögek pedig együtt az adott négyszöget adják.

A feladat feltételeit kielégítő P pontra az ABP és CDP háromszögek területének az összege is az adott négyszög területének a felét adja. Az ezt a feltételt kielégítő P pontok is egy egyenesen sorakoznak. Feltettük, hogy az AB és a CD egyenes nem párhuzamos. Jelöljük metszéspontjukat M-mel és a betűzést válasszuk úgy, hogy ez az oldal A-n, illetőleg D-n túli meghosszabbítására essék. Toljuk el ezután az oldalakat egyenesük mentén úgy, hogy A, illetőleg D az M pontba kerüljön. A keletkező MB', illetőleg MC' oldalakra P-ből húzott magasság nem változott meg, így az $MB'C'P$ négyszög területe is az eredeti négyszög területének a fele, a keresett pontok tehát egy $B'C'$-vel párhuzamos egyenesen vannak, amint azt az előzőekben beláttuk.

Ez az egyenes átmegy az átlók felezőpontján, ugyanis a CDF háromszög területe is a BCD háromszög területének a fele, így az ABF és a CDF háromszög együttes területe az $ABCD$ négyszög területének a fele. Ugyanígy belátható, hogy az AC átló E felezőpontja is a szóban forgó egyenesen van. A P pont ezek szerint az EF egyenesnek és az F ponton át AC-vel párhuzamosan húzott egyenesnek a metszéspontja, vagyis F, ha a két egyenes különbözik. Ez esetben a BD átló felezi az $ABCD$ négyszög területét.[1] A két egyenes akkor esik egybe, ha az elsőnek említett egybeesik az AC egyenessel. Ekkor viszont P az AC átlón van, s így ez az átló felezi a négyszög területét.

Megjegyzések: 1. A megoldásban két mértani hely szerepelt, amelyek a következő alakban egyesíthetők: Adott a síkban két szakasz, keressük azoknak a pontoknak a mértani helyét, amelyeket a két szakasz végpontjaival összekötve a keletkező két háromszög területének az összege egy adott érték. A feladat megoldásához nem volt szükség a mértani hely pontos meghatározására.

A feladat megoldása során azt is láttuk, hogy ha a két szakasz nem párhuzamos, akkor az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy egyik végpontjuk közös. Ez esetben a két szakasz egy-egy félegyenest határoz meg, és a mértani helynek a köztük levő szögtartományba eső részét egy, a másik végpontokat összekötő egyenessel párhuzamos egyenes tartalmazza. Könnyű látni, hogy a mértani helynek a szögtartományba eső része az egyenes ideeső szakasza, és az egész mértani hely annak a paralelogrammának a határa, amelyiknek ez a szakasz az egyik oldala és középpontja a szakaszok közös végpontja.

Egyszerűsödik a helyzet, ha a területeket előjeles mennyiségeknek tekintjük a következő módon: megadjuk a határnak a körüljárási irányát (sokszögeknél pl. az egymás utáni csúcsok felsorolásával), és pozitívnak tekintjük a területet, ha a körüljárási irány az óramutató járásával ellentétes, negatívnak, ha azzal megegyező.

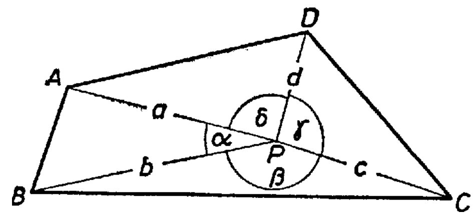
Könnyen látható, hogy ez esetben nem változik a mértanihely-problémában a területösszeg akkor sem, ha az egyenes mentén kilépünk a szögtartományból, s így a mértani hely egy egyenes lesz.

Bonyolódik a helyzet, ha a két szakasz párhuzamos. Ha pl. a területet mindig pozitív mennyiségnek tekintjük és a két szakasz egyenlő hosszú, továbbá a két háromszög területének összege a szakaszok meghatározta paralelogramma

[1] Ábránk esetében nincs a feltételt kielégítő P pont, sem a négyszög területét felező átló, annak érdekében, hogy a két mértani hely különváljék.

területének a fele, akkor a két szakasz egyenesei közti sáv összes pontja alkotja a mértani helyet. A területösszeg nem lehet kisebb ennél az értéknél.

A kérdés további elemzését az Olvasóra bízzuk.



4. ábra

III. megoldás. Jelöljük a P pontból a négyszög csúcsaihoz vezető szakaszokat és a köztük levő szögeket a, b, c, d-vel, illetőleg α, β, γ, δ-val amint a 4. ábra mutatja, és írjuk fel a feladatban szereplő négy háromszög kétszeres területének az egyenlőségét, a területet két oldallal és a köztük levő szöggel fejezve ki:

$$ab\sin\alpha = bc\sin\beta = cd\sin\gamma = da\sin\delta.$$

Innen az első és a harmadik kifejezés szorzata egyenlő a második és a negyedik szorzatával. A 0-tól különböző $abcd$ szorzatot mindkettőből elhagyhatjuk és a következő, szögek közti összefüggést kapjuk:

$$\sin\alpha\sin\gamma = \sin\beta\sin\delta.$$

Az összefüggést a

$$2\sin\varphi\sin\psi = \cos(\varphi-\psi) - \cos(\varphi+\psi)$$

azonosság alapján így alakíthatjuk át:

$$\cos(\alpha-\gamma) - \cos(\alpha+\gamma) = \cos(\beta-\delta) - \cos(\beta+\delta).$$

Tudjuk azt is, hogy a négy szög összege 360°, ezért

$$\cos(\beta+\delta) = \cos\big(-(\alpha+\gamma)\big) = \cos(\alpha+\gamma),$$

és így a két kisebbítendő is egyenlő. Az egyes szögek 180°-nál kisebb pozitív szögek, így a szögkülönbségek $-180°$ és 180° közt vannak. Koszinuszaik tehát csak úgy lehetnek egyenlők, ha a szögek vagy egyenlők, vagy egymás ellentettjei. Az első esetben

$$\alpha-\gamma = \beta-\delta \quad \text{azaz} \quad \alpha+\delta = \beta+\gamma,$$

és mivel a négy szög összege 360°, így az egyenlőség mindkét oldalán 180° áll, azaz P a BD szakaszon van, tehát BD felezi a négyszög területét.

A második esetben

$$\alpha-\gamma = \delta-\beta \quad \text{azaz} \quad \alpha+\beta = \gamma+\delta.$$

Ekkor P az AC átlón van, és ez felezi a négyszög területét.

IV. megoldás. Megoldhatjuk a feladatot a vektoriális szorzat felhasználásával is. Jelöljük a P pontból a csúcsokhoz mutató vektorokat $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$-vel. Ekkor a feltételben szereplő négy háromszög területének egyenlőségét az

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{b}\times\mathbf{c} = \mathbf{c}\times\mathbf{d} = \mathbf{d}\times\mathbf{a}$$

egyenlőségek fejezik ki. Valóban, az egyes vektorszorzatok hossza a háromszögek területének a kétszerese, és a vektorok a sík ugyanazon oldalára mutatnak, mert a P pont a négyszög belsejében van.

Képezzük az első és második, továbbá a harmadik és negyedik szorzat különbségét és használjuk fel, hogy a vektoriális szorzat a tényezők felcserélésével az ellentettjére változik, továbbá a disztributív tulajdonságát:

$$\mathbf{o} = \mathbf{a}\times\mathbf{b} - \mathbf{b}\times\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{b} + \mathbf{c}\times\mathbf{b} = (\mathbf{a}+\mathbf{c})\times\mathbf{b};$$

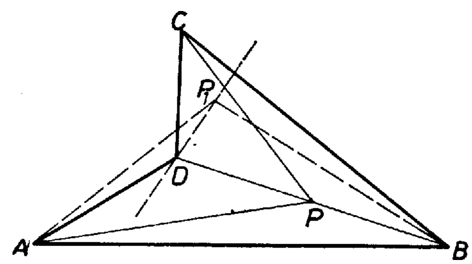
és hasonlóan kapjuk, hogy

$$\mathbf{o} = (\mathbf{c}+\mathbf{a})\times\mathbf{d}.$$

Az először nyert szorzat csak úgy lehet a nullavektor, ha $\mathbf{a}+\mathbf{c} = \mathbf{o}$, vagy $\mathbf{a}+\mathbf{c}$ és $\mathbf{b}$ párhuzamos. Az első esetben $\mathbf{c} = -\mathbf{a}$, ami azt jelenti, hogy P az AC átló felezőpontja, így ez az átló felezi a négyszög területét. Ha viszont $\mathbf{a}+\mathbf{c}$ nem $\mathbf{o}$ és párhuzamos $\mathbf{b}$-vel, akkor a második nyert összefüggésből adódik, hogy $\mathbf{d}$-vel is párhuzamos, vagyis $\mathbf{b}$ és $\mathbf{d}$ párhuzamos vektorok. Ekkor tehát P a BD átlón van, és így ez az átló felezi a négyszög területét.

Megjegyzés. Az adott négyszög konvex voltát csak annyiban használtuk fel, hogy a megoldásban szereplő vektoriális szorzatok a sík ugyanazon oldalára mutatnak. Ez azonban konkáv négyszögre is teljesül, ha a P-ből a csúcsokhoz húzott szakaszok a négyszög belsejében vannak.

Belátjuk, hogy ha konkáv négyszög belsejében van a feltételnek eleget tevő P pont, akkor az utoljára mondott feltétel teljesül rá, és így a feladat állítása a konvexitás kikötése nélkül is igaz. Valóban, ha a négyszög konkáv szöge a D csúcsnál van, akkor a $\tau_{ADP} = \tau_{CDP}$ egyenlőségből következik, hogy a DP egyenes vagy felezi az AC szakaszt, vagy párhuzamos vele. Az első esetben a PA, PB, PC, PD szakaszok a négyszög belsejében futnak. Ha viszont egy P_1 pontra az utóbbi teljesül, akkor vagy az ABP_1 háromszög, vagy a BCP_1 háromszög tartalmazza a D pontot (5. ábra), mondjuk, az előbbi eset áll fenn. Ekkor a háromszög tartalmazza az ADP_1 háromszöget is, tehát területe nagyobb, mint az utóbbié, így nem teljesülhet a P_1 pontra a feladat feltétele.



5. ábra

2. *Az* 1, 2, ..., n *számok közül úgy akarunk kiválasztani* $\{a, b, c\}$ *hármasokat, hogy* $a < b < c$, *továbbá hogy bármely két kiválasztott* $\{a, b, c\}$, $\{a', b', c'\}$ *hármasra az* $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$ *egyenlőségek közül legfeljebb egy teljesüljön.*

Maximálisan hány ilyen számhármast választhatunk ki?

Megoldás. 1. Ha a középső elem egy adott b szám, akkor az első elem az $1, 2, \ldots, b-1$ számok valamelyike lehet, a harmadik pedig a $b+1, \ldots, n$ számok valamelyike. Az előbbiek száma $b-1$, az utóbbiaké $n-b$. A kettő közül a kisebbik – vagy közös értékük, ha a kettő egyenlő–, adja meg, hogy b maximálisan hány hármasban léphet fel középső elemként.

Természetesen $2 \leqq b \leqq n-1$, és az elmondottak szerint a 2 és az $n-1$ egyszer, a 3 és az $n-2$ kétszer léphet fel maximálisan, és így tovább. Így a kiválasztható hármasok számára a következő felső korlátot nyertük: ha n páros, $n = 2k$ akkor

$$2 \cdot (1 + 2 + \ldots + k - 1) = k(k-1) = n(n-2)/4;$$

ha n páratlan, $n = 2k+1$, akkor

$$2 \cdot (1 + 2 + \ldots + k - 1) + k = k^2 = \big((n-1)/2\big)^2.$$

2. Ennyi hármas ki is választható a feltételnek megfelelő módon minden esetben. Vegyük például az $\{a, b, a+b\}$ alakú hármasokat, ahol $1 \leqq a < b$ és $a + b \leqq n$. Itt a hármas bármelyik két eleme meghatározza a harmadikat, így két különböző hármasnak legfeljebb egy helyen lehet egyező eleme.

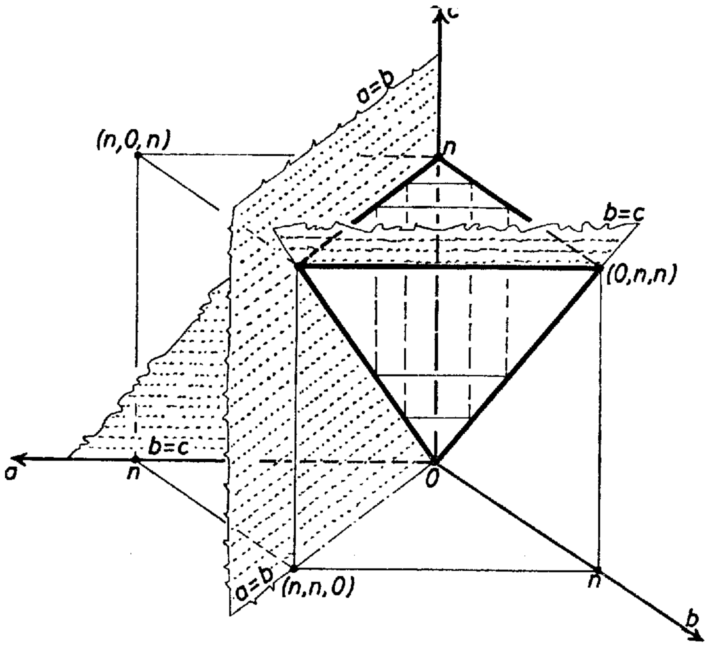
Az is látható, hogy ha $b \leqq n/2$, akkor első elemnek 1-től $b-1$-ig minden érték előfordul, mert b-hez adva még n-nél kevesebbet ad, ha pedig $b > n/2$, akkor harmadik elemként $b+1$-től (amikor $a = 1$) n-ig minden érték előfordul, mert a hozzájuk tartozó első elemre $a = c - b < n - n/2 = n/2$, és ez kisebb b-nél. A kiválasztott hármasok száma tehát annyi, mint a felső korlátként kapott érték.

Megjegyzések: 1. A nyert eredmény írható az egészrész jelével egy formulában $\left[\big((n-1)/2\big)^2\right]$ alakban.

2. Más módokon is választhatunk ki maximális számú hármasokból álló rendszert. Ilyenek pl. az $\{a, a+d, n+1-d\}$ hármasok, ahol $1 \leqq d \leqq \dfrac{n-a}{2}$, vagy az $\{a, a+d, a+2d\}$ hármasok, ahol $1 \leqq d \leqq \dfrac{n-a}{2}$;

3. A megoldásban csak azt használtuk ki, hogy két hármas az első és második elemében, továbbá a második és harmadik elemében nem egyezhet meg. Akkor sem lehet tehát több hármast kiválasztani, ha azt megengedjük, hogy két hármas az első és harmadik elemében megegyezzék.

4. A megoldást szemléletessé tehetjük úgy, hogy a számhármasokat térbeli koordinátáknak tekintjük. Ekkor az első síknyolcadban keressük azokat az egész koordinátájú pontokat, amelyek az n élhosszúságú kockában vannak, és az $a = b$ egyenletű átlós síknak a pozitív b-tengelyt, továbbá a $b = c$ egyenletűnek a pozitív c-tengelyt tartalmazó oldalára esnek (a határsíkot már kizárva); végül a koordinátaegyezések kizárására vonatkozó kikötés geometriailag azt jelenti, hogy a tengelyekkel párhuzamos egyeneseken csak egy-egy kiválasztott pont lehet.



6. ábra

A síkok a kockából egy tetraédert vágnak ki (6. ábra). Ebből kell az utolsó feltételnek is megfelelően maximális számú pontot kiválasztani. Az egy adott b értékhez tartozó pontok a tetraéder egy téglalap alakú metszetébe eső egész koordinátájú pontok. Ezek közül nem választható ki több, mint ahány egész c értékhez tartozó, a-tengellyel párhuzamos egyenes van a téglalapon, sem annál több, mint az egész a értékhez tartozó, c tengellyel párhuzamos egyenesek száma, vagyis nem választható ki több, mint a két szám kisebbike. Ez pedig a fent nyert becsléshez vezet.

5. Többen azzal vélték megoldani a feladatot, hogy megadták a hármasoknak egy rendszerét (történetesen a föntebb említettek valamelyikét) és azt mutatták meg, hogy ezekhez nem vehető hozzá további hármas a kikötések megsértése nélkül. Ebből azonban még nem következik, hogy a kiválasztott hármasok száma maximális. Az első 5 számból válogatva pl. az $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 4, 5\}$, $\{2, 3, 4\}$ rendszer nem bővíthető, de tudjuk, hogy kiválasztható 4 hármas is úgy, hogy ne sértse meg az előírásokat.

Ezzel kapcsolatban felmerül egy probléma is. Az $1, 2, \ldots, n$ számok közül úgy akarunk kiválasztani a feladat feltételeinek megfelelő hármasokat, hogy további hármast már ne lehessen hozzávenni. Mi az ilyen rendszerek elemszámának a minimuma? Könnyű látni, hogy $n = 5$-re két hármas még nem zárhat ki minden továbbit, így a kérdezett minimum 3. Az előző megjegyzésben leírt szemléltetés segítségével sikerült $n = 6$, 7, 8, 9-re rendre 5, 7, 10, illetőleg 13 hármasból álló, nem bővíthető rendszert találni, de lehet, hogy ezek nem a minimális értékek. (A kiválasztható hármasok maximális száma ezekre az n értékekre 6, 9, 12, illetőleg 16.)

Ha a feltételt a 3. megjegyzésben említett gyengébbel helyettesítjük, akkor már igaz, hogy a hármasok minden olyan rendszere, amelyik nem bővíthető, maximális elemszámú. Valóban, két különböző középsőelemű hármas nem zárja ki egymást, ha pedig azok közt, amelyek középső eleme ugyanaz a b érték, és nem fordul elő $b \leqq \dfrac{n}{2}$ esetén valamilyen $a < b$ érték első elemként, illetőleg $b > n/2$ esetén valamilyen $b+1$ és n közti c érték harmadik elemként, akkor van olyan $\{a, b, c\}$ hármas, amelyik hozzávehető a rendszerhez, mert az előbbi esetben a harmadik helyre, az utóbbiban az első helyre legalább annyi szám áll rendelkezésre, mint a másik helyre.

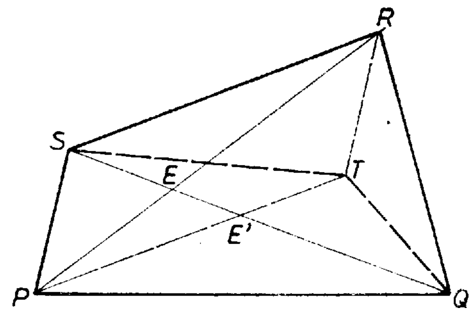
3. *A konvex $PQRS$ négyszög minden csúcsának mindkét koordinátája egész szám. A négyszög átlóinak metszéspontja legyen E. Bizonyítsuk be, hogy ha a négyszög P és Q csúcsánál lévő szögek összege $180°$-nál kisebb, akkor a PQE háromszög tartalmaz a belsejében vagy a határán olyan P-től és Q-tól különböző pontot, amelynek szintén egészek a koordinátái.*

Hogy rövidebben tudjuk magunkat kifejezni, az egész koordinátájú pontokat *rácspontnak* fogjuk nevezni és az olyan sokszögeket, amelyeknek minden csúcsa rácspont, *rácssokszögnek.*

I. megoldás. 1. Egyrészt belátjuk, hogy a sokszög, pontosabban a PQR vagy a PQS háromszög tartalmaz a csúcsain kívül is rácspontot, másrészt azt, hogy ha van rácspont az EPS vagy az EQR háromszög belsejében, akkor egy ilyen rácsponttal helyettesítve az S, illetőleg az R csúcsot, elég az állítást a keletkező kisebb négyszögre bizonyítani, erre is teljesülnek a feladat feltételei.

A kettőből következik a feladat állítása. Négyszögünk ugyanis csak véges számú rácspontot tartalmazhat, így a második állításban megfogalmazott eljárást véges sokszor alkalmazva, ha szükséges, olyan négyszöghöz jutunk, amelyikben a (megfelelő) EPS és EQR háromszög belsejében már nincs rácspont. Az első állítás szerint ebben is tartalmaz rácspontot a csúcsain kívül a PQR vagy a PQS háromszög. Ezt a rácspontot tehát az EPQ háromszögnek is tartalmaznia kell, és különbözik P-től és Q-tól.

2. A fenti második állítás helyessége nyilvánvaló. Ha ugyanis pl. az EQR háromszögben van egy T rácspont (7. ábra), akkor $TQP\sphericalangle < RQP\sphericalangle$, tehát a szögekre vonatkozó feltétel a $PQTS$ négyszögre is teljesül; az átlók E' metszéspontja pedig a QS átló QE szakaszára esik, tehát az $E'PQ$ háromszögben levő rácspont az EPQ háromszögnek is pontja.



7. ábra

3. Válasszuk a betűzést úgy, hogy az R csúcs ne essék közelebb a PQ egyeneshez, mint S. Ekkor az a T pont, amelyikre $PTRS$ paralelogramma, a PQR háromszög belsejében van, vagy a PQ szakasz belsejében, mert a szögfeltétel szerint az RT félegyenes a négyszög belseje felé indul, a PT félegyenes pedig vagy a négyszög belsejébe indul, vagy egybeesik a PQ félegyenessel.

T rácspont. Jelöljük ugyanis a P, R, S, T koordinátáit (p_1,p_2), (r_1,r_2), (s_1,s_2), (t_1,t_2)-vel. A paralelogramma átlóinak felezőpontjai egybeesnek. Ezt koordinátákban felírva

$$\frac{p_1+r_1}{2}=\frac{t_1+s_1}{2},\qquad \frac{p_2+r_2}{2}=\frac{t_2+s_2}{2}.$$

Innen a T pont koordinátái

$$t_i=p_i+r_i-s_i\quad (i=1,\,2).$$

Ezek egész számok, ha p_i, r_i, s_i egész. Ezzel az 1. rész első állítását is igazoltuk, a feladatot megoldottuk.

Megjegyzések: 1. A 3. pontban lényegében a következő tételt bizonyítottuk be, amelyik független a rácspontoktól: *Minden konvex négyszögnek van olyan csúcsa, amelyikből induló oldalakat paralelogrammává egészítve ki, ezt a négyszög tartalmazza.* Ez az 1950. évben a Középiskolai Matematikai Lapok Országos Tanulóversenyén (a mai Arany Dániel verseny elődje) a haladók 3. feladata volt.[2]

A tétel speciális esete a következőnek: *Egy konvex n-szögnek, ha $n>3$, legalább $n-3$ olyan csúcsa van, amelyekből induló oldalakat paralelogrammává egészítve ki, a paralelogrammát a sokszög tartalmazza.* Ez viszont már az egyetemi hallgatók 1964. évi Schweitzer Miklós emlékversenyének 4. feladata volt.[3]

2. A harmadik pont második állítása így fogalmazható: *Egy rácspontnak két rácspont közti szakasz felezőpontjára vonatkozó tükörképe rácspont.* Ez igaz egységnyi oldalú négyzetekből épített rács helyett tetszés szerinti paralelogrammarácsra is. Egy ilyen úgy keletkezik, hogy egy paralelogramma egyik csúcsából induló oldalegyeneseire mindkét irányban rámérjük az oldalt ismételten minden határon túl, majd a keletkező pontokon át a másik oldalegyenessel párhuzamos egyenest húzunk. A két egyenessereg metszéspontjai a keletkező paralelogrammarács rácspontjai.[4]

Jelöljük a kiválasztott paralelogrammacsúcsot O-val, a belőle induló oldalakat mint vektorokat $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$-vel, ekkor világos, hogy a rácspontok az $u\mathbf{a}+v\mathbf{b}$ helyvektorú pontok, ahol u és v tetszés szerinti egész szám.

Legyen E, F, G három rácspont, helyvektoraik $\mathbf{e},\mathbf{f},\mathbf{g}$. Ekkor G-nek az EF szakasz felezőpontjára vonatkozó G' tükörképére $\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{GF}$. Így G' helyvektorára

$$\mathbf{g}'=\mathbf{g}+\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{GF}=\mathbf{g}+(\mathbf{e}-\mathbf{g})+(\mathbf{f}-\mathbf{g})=\mathbf{e}+\mathbf{f}-\mathbf{g}.$$

Mivel a jobb oldalon álló vektorok mindegyike $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ egy-egy egész többszörösének az összege, így ugyanez áll g'-re is, tehát G' rácspont. Meggondolásunk akkor is helyes marad, ha E és F egybeesik, tehát *rácspontnak rácspontra vonatkozó tükörképe is rácspont.*

II. megoldás: A feladat állításának helyességét tetszés szerinti síkrácsra bizonyítjuk. Felhasználjuk ezeknek a következő tulajdonságát: *Ha egy egyenesen van két rácspont, akkor van végtelen sok, ezek egymástól egyenlő távolságra sorakoznak; a sík összes rácspontjai ezzel párhuzamos egyeneseken helyezkednek el, mindegyiken egymástól ugyanolyan távolságra, és az egyenesek is egymástól egyenlő távolságra következnek.* Ezt a megoldás végén bebizonyítjuk. A legalább két rácspontot tartalmazó egyeneseket *rácsegyenesnek* fogjuk nevezni.

[2]Több megoldás található rá lapunk II. Évf. 235–240. oldalán.

[3]Lásd Matematikai Lapok XVI. (1965) 93. és 100–101. old.

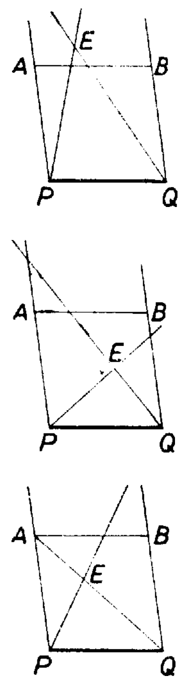
[4]Paralelogrammarácsok tulajdonságairól szól pl. *Hajós Gy.–Neukomm Gy.–Surányi J.:* Matematikai Versenytételek II., 3. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1988. 111–112. old. jegyzete.

Azt mutatjuk meg, hogy ha egy $PQRS$ négyszög csúcsai rácspontok, és az EPQ háromszög P-n és Q-n kívül nem tartalmaz rácspontot sem a határán sem a belsejében, akkor

$$PQR\sphericalangle + QPS\sphericalangle \geqq 180^\circ.$$

Ez egyenértékű a bizonyítandó állítással.

Feltétel szerint a PQ egyenesen és a vele párhuzamos rácsegyeneseken a szomszédos rácspontok távolsága a PQ szakasz hossza. Vegyük a PQ egyenesnek a négyszöget tartalmazó oldalán az első, PQ-val párhuzamos rácsegyenest és azon a QE egyeneshez legközelebbi A rácspontot a QE egyenes P-t tartalmazó oldalán, esetleg QE-n, továbbá a szomszédos B rácspontot úgy, hogy $APQB$ paralelogramma legyen (8. ábra). Ekkor E az AP és BQ egyenesek közti sáv pontja, mert az A és B rácspont választása folytán az EPQ háromszög vagy benne van az $APQB$ paralelogrammában, vagy az AB egyenes átmetszi a háromszöget. Utóbbi esetben az egyenesnek a háromszögbe eső szakasza az AB szakasz része, mert a háromszög nem tartalmaz rácspontot.



8. ábra

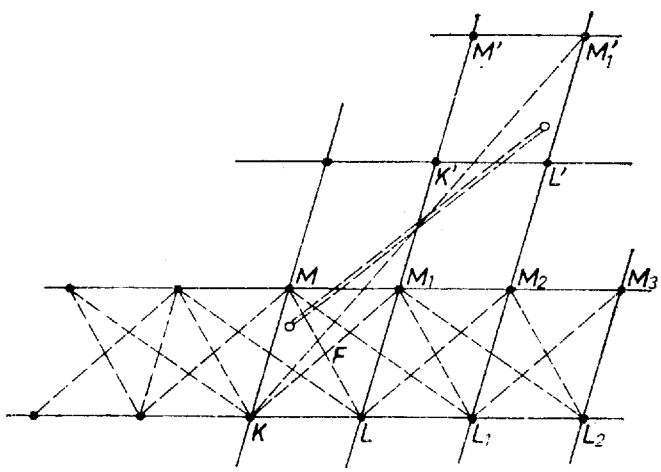
A sáv belsejében nincs rácspont, mert ha volna, az azon keresztülmenő, AP-vel párhuzamos rácsegyenesnek AP hosszúságú szakasza esnék az $APQB$ paralelogrammába, és ennek vagy a két végpontja, vagy egy belső pontja rácspont volna; a paralelogramma azonban nem tartalmaz a csúcsain kívül rácspontot.

Eszerint R és S, amelyek a PE, ill. a QE meghosszabbítására esnek, a sávon kívül vannak, annak különböző oldalán, vagy a sáv egyik, ill. másik határán. Így

$$PQR\sphericalangle + QPS\sphericalangle \geqq PQB\sphericalangle + QPA\sphericalangle = 180^\circ,$$

és ezt kellett bizonyítanunk.

A felhasznált segédtétel bizonyítása. Legyen K, L, M három rácspont, amelyek nincsenek egy egyenesen. Tegyük fel továbbá, hogy L a KL félegyenesnek a K-hoz legközelebbi rácspontja. Az előző megoldáshoz fűzött 2. megjegyzésbeli tétel szerint K-nak az LM szakasz F felezőpontjára vonatkozó M_1 tükörképe rácspont (9. ábra). Ez az M-en át KL-lel párhuzamosan húzott egyenesen van, és M és M_1 közt nincs rácspont, mert annak F-re vonatkozó tükörképe K és L közti rácspont volna, ilyen azonban nincs.



9. ábra

Hasonlóan M-nek LM_1 felezőpontjára vonatkozó L_1 tükörképe, majd L-nek L_1M_1 felezőpontjára vonatkozó M_2 tükörképe és így tovább, mindig a következő rácspontot adja, felváltva a KL és az MM_1 egyenesen. K és L szerepét felcserélve adódik, hogy az egyeneseken az ellenkező irányban is végtelen sok rácspont van, egymástól egyenlő távolságra.

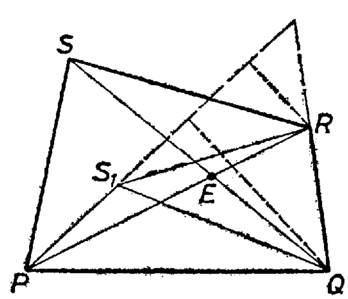
Ezzel eddig annyit láttunk be, hogy a KL egyenesen végtelen sok rácspont sorakozik egymástól egyenlő távolságra; továbbá egy M rácsponton át KL-lel párhuzamosan húzott egyenes szintén rácsegyenes, és ezen a szomszédos rácspontok távolsága szintén a KL távolság.

A KLM_1M paralelogrammában csak véges sok rácspont lehet, viszont a KL és MM_1 közti sávban minden KL-lel párhuzamos rácsegyenesen van a paralelogrammához tartozó rácspont, amint a megoldás első részében beláttuk. Így a sávban csak véges számú ilyen rácsegyenes futhat. Feltehetjük, hogy MM_1 már a legközelebbi, tehát a paralelogramma nem tartalmaz e csúcsain kívül rácspontot.

Húzzuk meg az LM_1 rácsegyenes minden rácspontján át a KL-lel párhuzamos rácsegyenest. Ezek együtt tartalmazzák az összes rácspontot. Ha ugyanis valamelyik két szomszédos egyenes közt volna még rácspont, azt tartalmazná egy KLM_1M-mel egybevágó és egyállású $K'L'M_1'M'$ paralelogramma (9. ábra, az egyező betűk megfelelő csúcsokat jelölnek). A két paralelogrammát a KM_1' felezőpontjára való tükrözés egymásba viszi át, így a vesszős paralelogrammában levő további rácspontot a vesszőtlen paralelogramma egy rácspontjába. Ilyen azonban nincs, így egyenlő távolságban sorakozó egyenesekből álló rácsegyenesseregünk az összes rácspontot tartalmazza. Ezzel a segédtételt bebizonyítottuk.

III. megoldás. Felhasználjuk a paralelogrammarácsok következő tulajdonságát: *Az olyan rácsháromszögeknek, amelyek sem belsejükben, sem a határukon nem tartalmaznak további rácspontot, egyenlő a területe.* Az ilyen háromszögeket *üres*nek fogjuk nevezni.

A feladat állítását indirekt úton bizonyítjuk, tehát feltesszük, hogy az EPQ háromszög nem tartalmaz P-n és Q-n kívül rácspontot. Legyen az EPS háromszög PQ egyeneshez legközelebbi, P-től különböző rácspontja S_1 (ez lehet S is, 10. ábra).



10. ábra

Egyfelől a PRS_1 háromszög területe kisebb a PQS_1-énél, mert a szögfeltételből következik, hogy a PS_1 és a QR egyenesek S_1-en, ill. R-en túli meghosszabbítása metszi egymást. Így a PS_1 oldalhoz tartozó magasság az előző háromszögben kisebb, mint az utóbbiban.

Másfelől nézve PQS_1 üres rácsháromszög, mert ha tartalmazna rácspontot a csúcsain kívül, ez közelebb lenne PQ-hoz, mint S_1, és az EPQ háromszögön kívül lenne az indirekt feltevés szerint, de ez S_1 választása szerint nem lehetséges.

A PRS_1 háromszög szintén rácsháromszög, és vagy üres, vagy felbontható több üres rácsháromszögre, területe tehát legalább akkora, mint a PQS_1, háromszögé. Ezzel ellentmondásra jutottunk, tehát feltevésünk nem lehet igaz.

Megjegyzések: 1. Lényegében a felhasznált segédtétel volt az 1942. évi verseny 2. feladata. Több bizonyítás található rá az előzőkben idézett könyv 110–117. oldalán.

2. Tetszés szerinti rácssokszög területe meghatározható rácspontjainak a megszámolásával. Az üres rácsháromszögek területét h-val jelölve, ha a sokszög belsejében b rácspont van, a kerületén a csúcsokat is beleszámítva, k darab, akkor a sokszög területe $(2b + k - 2)h$. Ezt a *G.Pick*-től származó tételt[5] felhasználva elvégezhető a fenti bizonyítás az S_1 pont segítségül vétele nélkül a PQS és a PRS háromszög területének összehasonlításával is.

[5]Az állítás könnyen következik az üres rácsháromszögekre vonatkozó tételből. Lásd az idézett könyv 117. oldalának jegyzetét. Szép közvetlen bizonyítást adott *Pólya György* és tőle függetlenül *Somogyi árpád.* Lásd *G. L. Alexanderson* és *Jean Andersen:* Pólya György élete és munkássága (ford.: Pataki Béláné), Matematikai Lapok 33 (1982–1986) 225–233. old.; lásd közelebbről a 229–233. oldalt. (Megjegyzendő, hogy ott a 2(a), 2(b) ábrán a szaggatott vonalak feleslegesek, a folytonosak közül kellene minden másodiknak szaggatottnak lennie.)