

1. Oldjuk meg az

$$\begin{aligned}x^2 + 3xy &= -2, \\ 2xy - y^2 &= -5\end{aligned}$$

egyenletrendszert.

Megoldás. Az első egyenletet 5-tel, a másodikat (-2) -vel szorozva, majd az egyenleteket összeadva az

$$5x^2 + 11xy + 2y^2 = 0$$

egyenletet kapjuk (kiküszöböltük a konstansokat).

Innen $x = -2y$ vagy $x = -\frac{1}{5}y$.

Ha $x = -2y$, akkor az első (vagy a második) egyenletbe helyettesítve

$$y^2 = 1; \quad y_1 = 1, \quad y_2 = -1.$$

Ha $y_1 = 1$, akkor $x_1 = -2$, ha $y_2 = -1$, akkor $x_2 = 2$.

Ha $x = -\frac{1}{5}y$, akkor $y^2 = \frac{25}{7}$; $y_3 = \frac{5}{\sqrt{7}}$, $y_4 = -\frac{5}{\sqrt{7}}$.

Ha $y_3 = \frac{5}{\sqrt{7}}$, akkor $x_3 = -\frac{1}{\sqrt{7}}$,

ha $y_4 = -\frac{5}{\sqrt{7}}$, akkor $x_4 = \frac{1}{\sqrt{7}}$.

Mind a négy számpár valóban megoldás.

2. Az $x^2 + px + q = 0$ egyenlet egyik gyöke 3, a másik gyöke megegyezik az egyenlet diszkriminánsának kétszeresével. Számítsa ki p és q értékét.

Megoldás. Jelölje D az egyenlet diszkriminánsát. Az egyenlet

$$x^2 - (3 + 2D)x + 6D = 0$$

alakban írható. Mivel

$$D = (3 + 2D)^2 - 24D,$$

ezért $4D^2 - 13D + 9 = 0$,

és így $D = 1$ vagy $D = \frac{9}{4}$.

Ha $D = 1$, akkor $p = -5$, $q = 6$.

Ekkor $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, így ez valóban megoldás.

Ha $D = \frac{9}{4}$, akkor $p = -\frac{15}{2}$, $q = \frac{27}{2}$.

Ekkor $x_1 = \frac{9}{2}$, $x_2 = 3$, így ez is valóban megoldás.

3. Oldja meg az

$$\lg(4 - x) + 2\lg 3 = \lg 108 - \frac{1}{2}\lg x^2$$

egyenletet.

Megoldás. Az egyenlet ($x < 4$, $x \neq 0$)

$$\lg\sqrt{x^2} + \lg(4 - x) = \lg 108 - \lg 9 \quad \text{alakba írható.}$$

Innen

$$\lg|x|(4 - x) = \lg 12.$$

$$|x|(4 - x) = 12.$$

Ha $x > 0$, akkor $x^2 - 4x + 12 = 0$; ennek az egyenletnek nincs valós megoldása.

Ha $x < 0$, akkor $x^2 - 4x - 12 = 0$, $x_1 = -2$, $x_2 = 6$.

Ez utóbbi nem lehet megoldás, az $x_1 = -2$ valóban megoldás, hiszen kielégíti az egyenletet.

4. Az ABC háromszög köré írt kör sugara 5 egység, az AB oldalé 8 egység, a másik két oldal aránya 2 : 5. Számítsa ki a háromszög másik két oldalát.

Megoldás. Jelölje γ az AB oldallal szemközti szöveget. Ekkor $8 = 10 \sin \gamma$, azaz $\sin \gamma = \frac{4}{5}$, $\cos \gamma = \frac{3}{5}$, vagy $\cos \gamma = -\frac{3}{5}$. Legyen a másik két oldal $2x$, illetve $5x$.

Ha $\cos \gamma = \frac{3}{5}$, akkor a koszinusztétel alkalmazásával

$$8^2 = (2x)^2 + (5x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 5x \cdot \frac{3}{5},$$

$$x^2 = \frac{64}{17}, \quad x = \sqrt{\frac{64}{17}} (= 1,94), \quad \text{így}$$

a másik két oldal hossza

$$2\sqrt{\frac{64}{17}} = (3,88), \quad \text{illetve} \quad 5\sqrt{\frac{64}{17}} (= 9,70)$$

egység, és ilyen háromszög valóban létezik, hiszen $3,88 + 8 > 9,70$.

Ha $\cos \gamma = -\frac{3}{5}$, akkor

$$8^2 = 4x^2 + 25x^2 + 12x^2,$$

$$x^2 = \frac{64}{41}, \quad x = \sqrt{\frac{64}{41}} (= 1,25),$$

így a másik két oldal 2,50, illetve 6,25 egység lehet. Mivel $2,50 + 6,25 > 8$, ezért ilyen háromszög is létezik.

5. Írja fel annak a körnek az egyenletét, amely az y tengelyt az origóban érinti, és érinti az $y = x + 2$ egyenletű egyenest is.

Megoldás. Ha egy kör az y tengelyt az origóban érinti, akkor a középpontja az x tengelyre illeszkedik, így a középpont ordinátája $v = 0$, a sugara pedig a középpont abszcisszájának abszolút értéke, tehát $r = |u|$, azaz $r^2 = u^2$. A keresett kör egyenlete tehát

$$(x - u)^2 + y^2 = u^2$$

alakban írható. Egy ilyen egyenletű kör akkor és csakis akkor érinti az $y = x + 2$ egyenletű egyenest, ha az egyenletek által alkotott egyenletrendszer megoldása során (x -re, vagy y -ra) kapott másodfokú egyenlet diszkriminánsa nulla.

$$(x - u)^2 + (x + 2)^2 = u^2,$$

$$x^2 - (u - 2)x + 2 = 0$$

$$D = (u - 2)^2 - 8.$$

$$D = 0, \quad \text{ha} \quad u = 2 + 2\sqrt{2} \approx 4,83, \quad \text{vagy} \quad u = 2 - 2\sqrt{2} \approx -0,83.$$

A feltételeknek megfelelő körök egyenlete:

$$(x - (2 + 2\sqrt{2}))^2 + y^2 = (2 + 2\sqrt{2})^2, \quad \text{illetve}$$

$$(x - (2 - 2\sqrt{2}))^2 + y^2 = (2 - 2\sqrt{2})^2.$$

6. Mely helyeken veszi fel az

$$f(x) = \sin^2 2x + 2 \cos^2 x - \frac{5}{4}$$

függvény a legnagyobb és a legkisebb értékét a $[0; \pi]$ intervallumban? Mekkora ez a legnagyobb és legkisebb érték?

Megoldás. Mivel $\sin^2 2x = 1 - \cos^2 2x$ és $2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x$; ezért azonos átalakításokkal

$$f(x) = 1 - \left(\cos 2x - \frac{1}{2} \right)^2.$$

Tudjuk, hogy $-1 \leq \cos 2x \leq 1$, ezért

$$-\frac{3}{2} \leq \cos 2x - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2},$$

$$0 \leq \left(\cos 2x - \frac{1}{2} \right)^2 \leq \frac{9}{4}, \quad \text{így}$$

$$-\frac{5}{4} \leq f(x) \leq 1.$$

Az $f(x)$ a legnagyobb értékét, 1-et akkor veszi fel, ha

$$2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{vagy} \quad 2x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in Z,$$

azaz, $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, vagy $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi$, $k \in Z$ helyeken veszi fel, és ezek közül az $x_1 = \frac{\pi}{6}$ és $x_2 = \frac{5\pi}{6}$ esik a $[0; \pi]$ intervallumba.

Az $f(x)$ a legkisebb értékét, $-\frac{5}{4}$ -et akkor veszi fel, ha

$$\cos 2x - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2},$$

$$\cos 2x = -1,$$

$$2x = \pi + 2k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in Z.$$

Ezek közül csak az $x_3 = \frac{\pi}{2}$ esik a $[0; \pi]$ intervallumba.

7. A p valós szám értékétől függően hány megoldása van a

$$\sqrt{2|\log_2 x| - (\log_2 x)^2} = p$$

egyenletnek?

Megoldás. Ha $p < 0$, akkor az egyenletnek nincs megoldása. Vegyük figyelembe, hogy $a^2 = |a|^2$.

Ha $p = 0$, akkor

$$|\log_2 x|(2 - |\log_2 x|) = 0.$$

Ha $|\log_2 x| = 0$, akkor $x_1 = 1$, ha pedig

$$|\log_2 x| = 2, \quad \text{akkor} \quad \log_2 x = 2 \quad \text{vagy} \quad \log_2 x = -2,$$

azaz $x_2 = 4$, $x_3 = \frac{1}{4}$.

$p = 0$ esetén az egyenletnek tehát három megoldása van.

Ha $p > 0$, akkor

$$|\log_2 x|^2 - 2|\log_2 x| + p^2 = 0.$$

Ennek diszkriminánsa $D = 4(1 - p^2)$.

Ha $D < 0$, azaz $p > 1$, akkor az egyenletnek nincs megoldása. Ha $D = 0$, azaz, ha $p = 1$, akkor

$$|\log_2 x| = 1, \quad \log_2 x = 1 \quad \text{vagy} \quad \log_2 x = -1,$$

$x_4 = 2$, $x_5 = \frac{1}{2}$, azaz $p = 1$ esetén az egyenletnek két megoldása van.

Ha $D > 0$, azaz ha $0 < p < 1$ akkor

$$|\log_2 x| = 1 \pm \sqrt{1 - p^2}.$$

Mivel $y_1 = 1 + \sqrt{1 - p^2} > 0$ és $y_2 = 1 - \sqrt{1 - p^2} > 0$, ezért ez esetben az egyenletnek négy megoldása van. ($x_6 = 2^{y_1}$, $x_7 = 2^{-y_1}$, $x_8 = 2^{y_2}$, $x_9 = 2^{-y_2}$.)

Összefoglalva : Ha $p < 0$ vagy $p > 1$, akkor nincs megoldása az egyenletnek. Ha $p = 0$, akkor a megoldások száma három (x_1 , x_2 , x_3), ha $p = 1$, akkor a megoldások száma kettő (x_4 , x_5), s ha $0 < p < 1$, akkor a megoldások száma négy (x_6 , x_7 , x_8 , x_9).

8. Egy háromszög a , b és c oldala között a következő összefüggés áll fenn:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b-c} = \frac{3}{a+b-c}.$$

Mekkora a b oldallal szemközi szög?

Megoldás. Végezzünk ekvivalens átalakításokat. ($b - c \neq 0$).

$$a(b-c) + (b-c)^2 + (a+b)^2 - c(a+b) = 3(a+b)(b-c).$$

Beszorzás és rendezés után

$$a^2 + c^2 + ac = b^2.$$

A koszinusz tétel szerint

$$a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta = b^2.$$

Ez utóbbi két egyenletből

$$\begin{aligned} ac(1 + 2 \cos \beta) &= 0, \\ \cos \beta &= -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

a b oldallal szemközti szög tehát 120° .