1. *Igazolja, hogy ha egy háromszög $BC = a$ oldalával szemközti szög $150°$, akkor*

$$b^2 + c^2 = r^2 - 4t\sqrt{3},$$

ahol b, c a háromszög másik két oldala, r a háromszög köré írt kör sugara, t pedig a háromszög területe.

Megoldás. A koszinusztétel szerint

$$b^2 + c^2 = a^2 + 2bc \cdot \cos 150°.$$

A háromszög területe

$$t = \frac{bc \cdot \sin 150°}{2}.$$

Ha r a háromszög köré írt kör sugara, akkor

$$a = 2r \sin 150°.$$

Mivel $\sin 150° = \dfrac{1}{2}$ és $\cos 150° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, ezért $a = r$ és $4t = bc$.

Ezeket felhasználva adódik, hogy valóban

$$b^2 + c^2 = r^2 - 4t\sqrt{3}.$$

2. *Tekintsük az*

$$f(x) = (x-1)^2 + (x-2)^2 + \ldots + (x-n)^2$$

függvényt, ahol $n \in N^+$. Mely helyen veszi fel a függvény a legkisebb értékét és mennyi ez a legkisebb érték?

Megoldás. Azonos átalakításokkal

$$f(x) = nx^2 - 2(1 + 2 \ldots + n)x + 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2.$$

Ismeretes, hogy

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

és

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Ezeket alkalmazva, majd teljes négyzetté kiegészítve kapjuk a következőket:

$$f(x) = nx^2 - n(n+1)x + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$f(x) = n\left(x - \frac{n+1}{2}\right)^2 + n \cdot \frac{n^2-1}{12}.$$

Az $f(x)$ függvény az $x_0 = \dfrac{n+1}{2}$ helyen veszi fel a legkisebb értékét és a legkisebb érték $\dfrac{n(n^2-1)}{12}$.

3. *Igazolja, hogy ha $a \geqq 0$, $b \geqq 0$, akkor*

$$\frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{4}(a+b) \geqq a\sqrt{b} + b\sqrt{a}.$$

Mikor egyenlő a két kifejezés?

Megoldás. Ekvivalens átalakításokkal az

$$\frac{1}{2}(a+b)\left(a + b + \frac{1}{2}\right) \geqq \sqrt{ab}(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \tag{1}$$

egyenlőséget kell igazolni.
Mivel

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}, \tag{2}$$

ezért elegendő igazolni a következőket:

$$a + b + \frac{1}{2} \geqq \sqrt{a} + \sqrt{b}, \tag{3}$$

illetve

$$a-\sqrt{a}+b-\sqrt{b}+\frac{1}{2}\geqq 0. \tag{4}$$

Azonos átalakításokkal kapjuk, hogy

$$a-\sqrt{a}+b-\sqrt{b}+\frac{1}{2}=\left(\sqrt{a}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{b}-\frac{1}{2}\right)^2.$$

Mivel $\left(\sqrt{a}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{b}-\frac{1}{2}\right)^2\geqq 0$, ezért a (4), a (3) és így az (1) egyenlőtlenséget is igazoltuk. A (2) illetve a (3) egyenlőtlenségben az egyenlőség akkor áll fenn, ha $a=b$, illetve $a=\frac{1}{4}$ és $b=\frac{1}{4}$, ezért az (1)-ben csak $a=\frac{1}{4}$ és $b=\frac{1}{4}$ esetén áll fenn egyenlőség.

4. *Az ABC háromszög oldalai $AB=13$; $BC=20$; $CA=21$ egység. Számítsa ki a BC oldalhoz tartozó súlyvonal hosszát.*

Megoldás. Jelölje a BC oldal felezőpontját A_1, az AA_1B szöget φ, így az AA_1C szög $180^\circ-\varphi$, végül legyen $AA_1=s$. Az AA_1B és az AA_1C háromszögekben alkalmazzuk a koszinusztételt:

$$13^2=s^2+10^2-2\cdot s\cdot 10\ \cos\ \varphi,$$
$$21^2=s^2+10^2+2\cdot s\cdot 10\ \cos\ \varphi$$

mert $\cos(180^\circ-\varphi)=-\cos\ \varphi$. E két egyenlet összeadása, majd a kapott egyenlet rendezése után

$$s^2=\frac{1}{2}\left(13^2+21^2-2\cdot 10^2\right)$$
$$s^2=205,\quad s=\sqrt{205}\approx 14,32.$$

Az adatok a háromszöget egyértelműen meghatározzák, igy az AA_1 súlyvonal hossza $14,32$ egység.

5. *Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelynek az e (egyenlete: $x-y=2$) és az f (egyenlete: $x+2y=14$) egyenesek közé eső szakaszát a $P(2;1)$ pont az e egyenestől számítva $1:2$ arányban osztja.*

Megoldás. Az e egyenes egy tetszőleges pontja $E(t;t-2)$, $t\in R$, az f egyenes egy tetszőleges pontja $F(14-2u;u)$, $u\in R$. Azokat az E és F pontokat keressük, amelyekre

$$FP=2\cdot PE$$

azaz

$$\overrightarrow{FP}=2\cdot\overrightarrow{PE}.$$

Mivel $\overrightarrow{FP}=(2u-12;1-u)$, $\overrightarrow{PE}=(t-2;t-3)$, ezért

$$2u-12=2t-4,$$

és

$$1-u=2t-6,$$

ahonnan $t=1$, $u=5$, azaz a szóban forgó E pont $E(1;-1)$ és az F pont $F(4,5)$, így a keresett egyenes (EP) egyenlete: $2x-y=3$.

Megjegyzés: A feladat más módon is megoldható. Az e és f egyenes metszéspontja $G(6;4)$. Legyen Q az a pont, amelyre $\overrightarrow{GQ}=3\cdot\overrightarrow{PG}$. Most $Q(-6;-5)$. A Q ponton áthaladó, az e egyenessel párhuzamos egyenes (egyenlete: $x-y=-1$ az f egyenest az $F(4;5)$ pontban metszi (miért?), így az FP egyenes egyenlete: $2x-y=3$.

6. *Egy négyzetes oszlop alapéle a, magassága m (térfogatát jelölje V_1); egy szabályos háromoldalú gúla alapéle b, magassága m (térfogatát jelölje V_2.)*

a) *Mekkora a $\frac{b}{a}$ arány, ha $V_1=\sqrt{3}\cdot V_2$?*

b) *Mekkora az $\frac{m}{a}$ arány, ha $V_1=\sqrt{3}\cdot V_2$ és a négyzetes oszlop palástfelszíne egyenlő a gúla palástfelszinével (oldallapjai területének összegével)?*

Megoldás.

a) $V_1=a^2m,\qquad V_2=\dfrac{b^2\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{m}{3},$
A feltétel szerint $\sqrt{3}\cdot V_2=V_1$, tehát

$$\frac{b^2m}{4}=a^2m,\qquad \text{amiből}\qquad \left(\frac{b}{a}\right)^2=4,$$

s mivel $\dfrac{b}{a}>0$, ezért $\dfrac{b}{a}=2$.

b) A gúla alaplapjának magassága $\dfrac{b\sqrt{3}}{2}$, ennek harmada $\dfrac{b}{2\sqrt{3}}$.
Ha a gúla oldallapjának a b oldalhoz tartozó magassága m_1, akkor

$$m_1^2=m^2+\frac{b^2}{12},\qquad \text{s mivel}\quad b=2a,$$

ezért $m_1^2=m^2+\dfrac{a^2}{3}$.
A feltétel szerint a palást felszínek egyenlők, tehát

$$4am=3\cdot\frac{2a\sqrt{m^2+\frac{a^2}{3}}}{2},$$

amiből $7m^2=3a^2$, azaz $\dfrac{m}{a}=\sqrt{\dfrac{3}{7}}$.

7. *Oldja meg a*

$$\log_3\frac{1}{x^2}+3\cdot\log_x\frac{1}{9}\geqq -8$$

egyenlőtlenséget!

Vegyük figyelembe, hogy $x>0$ és $x\neq 1$. Azonosságok alkalmazásával, ekvivalens átalakításokkal kapjuk, hogy

$$-2\log_3 x-6\log_x 3\geqq -8,$$
$$\log_3 x+3\log_x 3\leqq 4.$$

Legyen $\log_3 x=z$, ekkor $\log_x 3=\dfrac{1}{z}$, és az egyenlőtlenség a következő alakra hozható

$$\frac{z^2-4z+3}{z}\leqq 0.$$

Ennek megoldása (algebrai vagy grafikus úton)

$$z<0\qquad \text{vagy}\qquad 1\leqq z\leqq 3,$$

így $\log_3\ x<0$, vagy $1\leqq\log_3\ x\leqq 3$.
A 3 alapú logaritmus- (vagy az exponenciális-) függvény szigorú monoton növekedése miatt az egyenlőtlenség megoldásai

$$0<x<1\qquad \text{vagy}\qquad 3\leqq x\leqq 27.$$

8. *Mely α-ra van pontosan egy valós gyöke az*

$$x^2+\frac{2x}{\sqrt{\cos\alpha}}+\left(\frac{1}{\sin\alpha}+2\sqrt{2}\right)=0$$

egyenletnek?

Megoldás.
Az egyenletnek $\cos\alpha>0$, $\sin\alpha\neq 0$ esetén van értelme, azaz ha

$$-\frac{\pi}{2}+2k\pi<\alpha<2k\pi\qquad \text{vagy}\qquad 2k\pi<\alpha<\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in Z.$$

Az egyenletnek akkor van pontosan egy valós gyöke, ha a

$$D=\frac{4}{\cos\alpha}-\frac{4}{\sin\alpha}-8\sqrt{2}$$

diszkrimináns nulla.
Ez akkor teljesül, ha
$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\ \alpha-\cos\ \alpha)=\sin\ 2\alpha.$$
Mivel $\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}$, ezért $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\ 2\alpha$.

Ez utóbbi egyenlet megoldásai
$$2\alpha=\alpha-\frac{\pi}{4}+2n\pi\quad\text{vagy}\quad 2\alpha=\pi-\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)+2m\pi,$$
$n,\ m\in Z$
$$\alpha_{1,n}=-\frac{\pi}{4}+2n\pi\qquad\text{vagy}\qquad\alpha_{2,m}=\frac{5\pi}{12}+\frac{2}{3}m\pi.$$
$$\alpha_{1,n}\ \text{ esetén }\ \cos\ \alpha>0,\quad\sin\ \alpha\neq 0\ \text{ és }\ D=0,$$
tehát megoldások.
Ha $m=3k$, akkor $\alpha_{2,k}=\frac{5\pi}{12}+2k\pi$ szintén megoldás; ha $m=3k+1$, akkor $\cos\ \alpha<0$, így nem megoldás, míg ha $m=3k+2$, akkor $\alpha_{3,k}=\frac{7\pi}{4}+2k\pi$ szögek egybeesnek az $\alpha_{1,n}$ szögekkel, így attól nem eltérő megoldások.