A Bolyai János Matematikai Társulat Ifjúsági Matematikai Köre 1988. évi Téli Ankétját december 27-én és 28-án tartotta.

Az ankéton a következő előadások hangzottak el:

Pelikán József: Az arányos képviselet matematikája
Lovász László: Hogyan küldjünk üzenetet a Marsra?

Majd a résztvevők a 29. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiára javasolt feladatokat oldottak meg.
Ezek közül közlünk most néhányat megoldással együtt.

1. *Az a_n sorozat értelmezése:*

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

Bizonyítsuk be, hogy 2^k akkor és csakis akkor osztója a_n-nek, ha 2^k n-nek is osztója.

Megoldás. $q^{n+1} = 2q^n + q^{n-1}$ nyilván fennáll a $q^2 = 2q + 1$ egyenlet két gyökére: $q_1 = 1 + \sqrt{2}$, $q_2 = 1 - \sqrt{2}$. Tekintsük a következő sorozatot: $C_n = A \cdot q_1^n + B \cdot q_2^n$. Behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy $C_{n+1} = 2C_n + C_{n-1}$ teljesül. Most válasszuk meg A-t és B-t úgy, hogy $c_0 = a_0$ és $c_1 = a_1$ legyen. Ekkor a c_n és a_n sorozat megegyezik. Az $A + B = c_0 = a_0 = 0$ és $Aq_1 + Bq_2 = c_1 = a_1 = 1$ egyenletekből $A = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, $B = \dfrac{-1}{2\sqrt{2}}$. Ezzel megkaptuk az a_n sorozat általános tagjának képletét:

$$a_n = \frac{1}{2\sqrt{2}} q_1^n - \frac{1}{2\sqrt{2}} q_2^n = \frac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}. \tag{1}$$

A feladat annak az igazolása, hogy a_n-nek és n-nek a prímtényezős felbontásában a 2 azonos kitevővel szerepel.

I. A rekurzív formulát használva vegyük észre, hogy a sorozat minden páratlan indexű tagja páratlan, ezért az állítás igaz, ha n páratlan.

II. Ha n páros, akkor felírható $n = 2^k \cdot m$ alakban, ahol m páratlan.

Belátjuk, hogy tetszőleges i-re $a_{2i} = 2 \cdot x \cdot a_i$, ahol x páratlan. Ebből már következne a bizonyítandó állítás, hiszen $a_n = a_{2^k m} = 2 \cdot x_1 \cdot a_{2^{k-1}m} = 2^2 x_1 x_2 a_{2^{k-2}m} = \ldots = 2^k x_1 x_2 \ldots x_k a_m$, és így a_n-ben és n-ben is a 2 ugyanazon a (k-adik) hatványon van.

Az (1) formulát és a binomiális tételt alkalmazva adódik, hogy:

$$a_{2i} = \frac{(1+\sqrt{2})^{2i} - (1-\sqrt{2})^{2i}}{2\sqrt{2}} = \frac{(1+\sqrt{2})^{i} - (1-\sqrt{2})^{i}}{2\sqrt{2}} \cdot ((1+\sqrt{2})^i + (1-\sqrt{2})^i) =$$
$$= a_i \cdot 2 \cdot \left[\binom{i}{0} + \binom{i}{2}(\sqrt{2})^2 + \binom{i}{4}(\sqrt{2})^4 + \ldots\right].$$

A zárójeles tag viszont páratlan, mert $\binom{i}{0} = 1$ kivételével az összes benne szereplő tag páros.

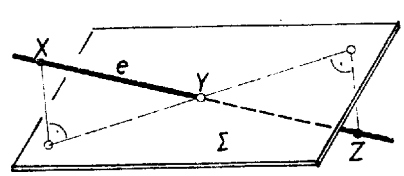
Benkő Dávid (Budapest, Móricz Zs. Gimn., IV. o. t.)

2. *Bizonyítsuk be, hogy a tetraéder két szemközti élének felezőpontjait tartalmazó sík a tetraédert két egyenlő térfogatú részre vágja szét.*

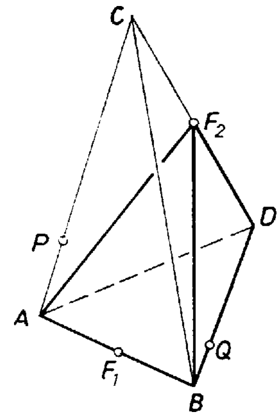
Megoldás. Először lássuk be a következő állítást. Ha az e egyenes a Σ síkot Y pontjában döfi, és az e egyenesen levő $X \neq Z$ pontokra $XY = YZ$, akkor X és Z egyenlő távol vannak a Σ síktól.

Ezt a nyilvánvaló állítást csak a könnyebb hivatkozás kedvéért nevezzük el lemmának.

A jelölések az ábrán láthatók.



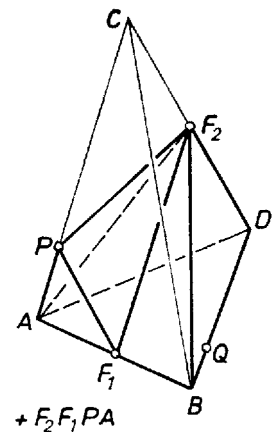
Ha a metsző sík tartalmazza AB-t, akkor a tetraéder az ABF_2D és ABF_2C tetraéderekre esik szét, amelyek közös lapja ABF_2, és a laphoz tartozó magasságuk arányos CF_2, ill. DF_2-vel, tehát lemmánk miatt egyenlők. Így a két térfogat is egyenlő.



Hasonlóan látható be az állítás helyessége, ha a metszősík tartalmazza CD-t.

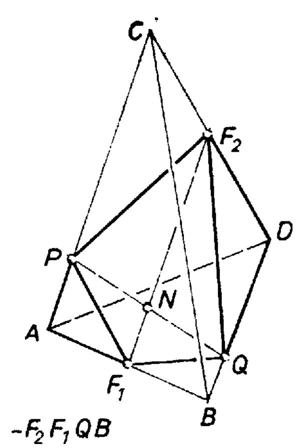
Ha ezek egyike sem áll fenn, akkor a metsző sík AC-t, ill. DB-t egy-egy belső P, ill. Q pontban metszi. A metsző sík „alatti" részt megkapjuk, ha ABF_2D tetraéderhez hozzáragasztjuk az AF_2PF_1 tetraédert, és levágjuk az F_1F_2BQ tetraédert. Mivel ABF_2D térfogata fele az $ABCD$-ének, a metszősík „alatti" rész akkor a fele $ABCD$-nek, ha

$$V_{AF_1PF_2} = V_{BF_1QF_2}.$$



Térjünk át tetszőleges O-ból indított helyvektorokra. (Jelöljük pl. $\overrightarrow{OA}$-t A-val stb.) Feltehetjük, hogy P az AC-t $x : y$ arányban osztja:

$$P = (yA + xC)/(x + y).$$



A PF_1F_2 sík nyilván csak egy pontban, Q-ban metszi a DB szakaszt, így csak egy olyan pont van (a Q), amire PQ metszi az F_1F_2 szakaszt. Eme Q helyvektora:

$$Q = (yB + xD)/(x + y).$$

Ez valóban megfelel, mert így a PQ szakasz N felezőpontja rajta van az F_1F_2-n, azt $x:y$ arányban osztja $\big($mert $F_1=\frac{A+B}{2}$ és $F_2=\frac{C+D}{2}\big)$.

$$N=\big(y(A+B)+x(C+D)\big)/2(x+y).$$

Másrészt így lemmánk szerint az APF_1F_2 és BQF_1F_2 tetraéderek P-hez, ill. Q-hoz tartozó magassága megegyezik, mert $PN=QN$. Ezenkívül $T_{AF_1F_2}=T_{BF_1F_2}$, hiszen ABF_2-ben F_1F_2 súlyvonal. Mivel magasságuk és hozzá tartozó alapterületük megegyezik, az APF_1F_2 és BQF_1F_2 tetraéderek térfogata megegyezik.

Ezzel állításunkat beláttuk.

Csirik János (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., III. o. t.)

3. *Legyen f a pozitív egészek halmazán értelmezett pozitív egész értékű függvény. Feltesszük, hogy*

$$f\big(f(n)+f(k)\big)=n+k.$$

Meghatározandó $f(1988)$ értéke.

Megoldás. $f\big(f(n)+f(k)\big)=n+k$, ezért:

$$\begin{aligned}4f(n)&=\big(f(n)+f(n)\big)+\big(f(n)+f(n)\big)=\\&=f\left[f\big(f(n)+f(n)\big)+f\big(f(n)+f(n)\big)\right]=f\left[(n+n)+(n+n)\right]=\\&=f\left[\big((n-1)+(n-1)\big)+\big((n+1)+(n+1)\big)\right]=\\&=f\left[f\big(f(n-1)+f(n-1)\big)+f\big(f(n+1)+f(n+1)\big)\right]=\\&=\big(f(n-1)+f(n-1)\big)+\big(f(n+1)+f(n+1)\big).\end{aligned}$$

Azaz tetszőleges, 1-nél nagyobb pozitív egész n-re:

$$f(n)-f(n-1)=f(n+1)-f(n).$$

Ez pedig azt jelenti, hogy az

$$\big(n-1,f(n-1)\big),\quad \big(n,f(n)\big),\quad \big(n+1,f(n+1)\big)$$

koordinátájú rácspontok egy egyenesbe esnek. $n=2$-ről indulva teljes indukcióval rögtön adódik, hogy a függvény összes pontja egy egyenesen van. Tehát a függvény

$$f(i)=\alpha i+\beta \tag{1}$$

alakú, ahol α és β természetesen számok, és α nem negatív, mert a feltétel szerint $f(i)$ pozitív egész, bármely $i\in N^+$-re.

(1)-et használva :

$$f(n)+f(k)=\alpha(n+k)+2\beta.$$

Ezért:

$$n+k=f\big(f(n)+f(k)\big)=f\big(\alpha(n+k)+2\beta\big)=\alpha\big(\alpha(n+k)+2\beta\big)+\beta.$$

$Q=n+k$ jelöléssel tehát:

$$Q\left(1-\alpha^2\right)=2\alpha\beta=\beta.$$

Ez minden $Q\geq 2$ egészre igaz, így szükségképpen $1-\alpha^2=0$, $\alpha=1$. $0=2\beta+\beta$-ból pedig $\beta=0$. Tehát $f(i)=i$ bármely $i\in N^+$-re, és ezért $f(1988)=1988$.

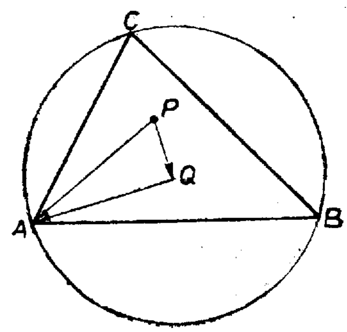
Benkő Dávid (Budapest, Móricz Zs. Gimn., IV. o. t.)

4. *Legyen Q az ABC háromszög beírt körének a középpontja, P pedig a háromszög síkjának tetszőleges pontja. Bizonyítsuk be, hogyha $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$, akkor*

$$a\cdot PA^2+b\cdot PB^2+c\cdot PC^2=a\cdot QA^2+b\cdot QB^2+c\cdot QC^2+(a+b+c)QP^2.$$

Megoldás. Emeljük négyzetre és szorozzuk be a-val a következő (nyilvánvaló igaz) egyenlőséget:

$$\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QA}.$$



Azt kapjuk, hogy $aPA^2 = aPQ^2 + aQA^2 + 2a\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QA}$. Bontsuk fel a $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC}$ vektorokat is hasonló módon, s járjunk el úgy, mint fent (természetesen b-vel, majd c-vel szorzunk). A kapott egyenletek összeadása után:

$$aPA^2 + bPB^2 + cPC^2 = aQA^2 + bQB^2 + cQC^2 +$$
$$+(a+b+c)PQ^2 + 2\overrightarrow{PQ}(\overrightarrow{QA}a + \overrightarrow{QB}b + \overrightarrow{QC}c).$$

A feladat állílásának bizonyításához már csak

(1) $$\overrightarrow{QA}a + \overrightarrow{QB}b + \overrightarrow{QC}c = 0$$

igazolandó. Ez pedig abból a tételből következik, mely szerint bármely X pontra:

$$\overline{X} = \frac{T_{ABX} \cdot \overline{C} + T_{BCX} \cdot \overline{A} + T_{CAX} \cdot \overline{B}}{T_{ABC}}.$$

Ha ezt a Q pontra írjuk fel, és a középpontnak is Q-t választjuk, akkor $\dfrac{T_{ABC}}{\varrho}$-val való szorzás után épp (1)-et kapjuk.

Sustik Mátyás (Budapest, Fazekas M. Gimn., IV. o. t.)

5. *Az egészekből álló sorozat tagjaira* $a_1 = 2,\ a_2 = 7,$

$$-\frac{1}{2} < a_{n+1} - \frac{a_n^2}{a_{n-1}} \le \frac{1}{2}, \quad (n \ge 2)$$

teljesül. Bizonyítsuk be, hogy a_n *páratlan, ha* $n > 1$.

Megoldás. Állítjuk, hogy a_n éppen a

$$b_1 = 2,\ b_2 = 7,\ b_{n+1} = \frac{b_n^2 + (-2)^{n-2}}{b_{n-1}} \quad (n \ge 2)$$

definícióval megadott sorozat, azaz $a_n = b_n$.
Ehhez először definiáljuk a $\{c_n\}$ sorozatot is:

$$c_1 = 2, \quad c_2 = 7, \quad c_{n+1} = 3c_n + 2c_{n-1} \quad (n > 1).$$

Megmutatjuk, hogy $b_n = c_n$. Ezt n-re vonatkozó teljes indukcióval igazoljuk. Az első néhány értékre könnyű ezt ellenőrizni; most belátjuk, hogy az állítás n-ről $(n+1)$-re átöröklődik. Azt kell megmutatnunk, hogy

$$c_{n+1} = 3c_n + 2c_{n-1} = \frac{b_n^2 + (-2)^{n-2}}{b_{n-1}} = b_{n+1}.$$

$b_n = c_n,\ b_{n-1} = c_{n-1}$ felhasználásával rendezés után

(1) $$3b_nb_{n-1} + 2b_{n-1}^2 = b_n^2 + (-2)^{n-2}.$$

A $b_n = \dfrac{b_{n-1}^2 + (-2)^{n-3}}{b_{n-2}}$ összefüggésből $b_{n-1}^2 = b_nb_{n-2} - (-2)^{n-3}$. Ezt behelyettesítve (1)-be:

$$3b_nb_{n-1} + 2b_nb_{n-2} - 2(-2)^{n-3} = b_n^2 + (-2)^{n-2},$$

azaz:

$$b_n(3b_{n-1} + 2b_{n-2}) + (-2)^{n-2} = b_n^2 + (-2)^{n-2}.$$

Ez pedig teljesül, mert $b_n = 3b_{n-1} + 2b_{n-2} = 3c_{n-1} + 2c_{n-2} = c_n$.

A $\{c_n\}$ sorozat definíciójából teljes indukcióval azonnal következik, hogy az elemek $n>1$ esetén páratlan egészek.

Teljes indukcióval igazoljuk azt is, hogy $c_n > 2^n$, ha $n>1$. Nyilván $c_2>4$, $\quad c_3>8$. Tegyük fel, hogy $c_k>2^k$, ha $k=2,\ldots,n$ $(n\geq 3)$. Ekkor:

$$c_{n+1}=3c_n+2c_{n-1}>3\cdot 2^n+2\cdot 2^{n-1}=2^{n+2}\quad (n-1>1).$$

Végül bebizonyítjuk, hogy $b_n=c_n=a_n$. A $\{b_n\}$ sorozat elemei egészek, és $a_1=b_1=2,\ a_2=b_2=7$. Igazoljuk, hogy

$$-\frac{1}{2}<b_{n+1}-\frac{b_n^2}{b_{n-1}}\leq\frac{1}{2},$$

azaz:

$$-\frac{1}{2}<\frac{b_n^2+(-2)^{n-2}-b_n^2}{b_{n-1}}\leq\frac{1}{2}.$$

Valóban, $\frac{1}{2}b_{n-1}>2^{n-2}$ miatt ez teljesül, ha $n\geq 3$. Az $n=2$ esetben pedig azt találjuk, hogy a jobb oldalon egyenlőség áll. Mivel $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ 1 hosszúságú, félig zárt intervallum, indukcióval következik, hogy csak $b_{n+1}=a_{n+1}$ lehet.

Sustik Mátyás (Budapest, Fazekas M. Gimn., IV. o. t.)

6. *Egy kerekasztal körül $2n$ ember ülésezik. Szünet után újra leülnek valamennyien tetszőleges sorrendben. Bizonyítsuk be, hogy van két ember, akik között szünet előtt és szünet után is ugyanannyi ember ült.*

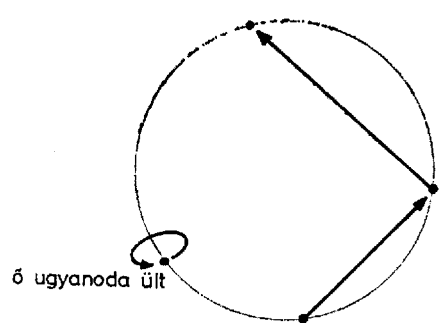
Megoldás. Az egyes emberek helyét forgatásokkal jellemezhetjük (az asztal középpontja körül) aszerint, hogy a szünet előtti helyükről mekkora pozitív irányú forgatás viszi őket a szünet utáni helyükre. A forgatás egysége a „székköz". Az asztal kerek, ezért $2n$, és ennek egész számú többszörösei az embereket a helyükön hagyják, így összesen csak $2n$ különböző forgatás létezik (a $0,\ 1,\ 2,\ldots,\ 2n-1$).

Ha van két ember, akiket ugyanaz a forgatás jellemez, akkor készen vagyunk, hiszen ugyanaz a forgatás a köztük levő székek (emberek) számát is megtartja.

Tegyük fel, hogy nincs két ilyen ember, tehát minden embert különböző nagyságú forgatás jellemez. $2n$ ember és $2n$ féle forgatás van, ezért minden forgatás egyszer fordul elő. Jelöljük a forgatások összegét F-fel. Az előbbiek szerint

$$F=0+1+2+\ldots+2n-1=\frac{2n(2n-1)}{2}=2n^2-n.$$

Most egy kicsit más oldalról közelítjük meg a problémát. Jelöljük meg egy-egy nyíllal minden embernél, hogy honnan hová ült át. Így egy irányított gráfot kapunk, amelynek minden szögpontjába mutat egy nyíl, és indul is egy nyíl, mert minden széken egy ember ült a szünet előtt, és minden székre egy ember ült a szünet után.



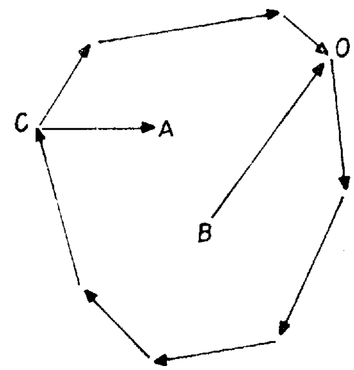
Induljunk el valamelyik széktől a nyilak mentén. Az előbbi tulajdonság miatt utunknak sohasem lesz vége. Véges sok pontunk van, ezért egy idő után egy olyan székhez fogunk érkezni, ahol már voltunk. Az első ilyen szék csak az lehet, ahonnan elindultunk, mert ellenkező esetben lenne olyan szék, ahová két nyíl mutat. Ezek szerint, ha az ilyen „körök" mentén adjuk össze a forgatásokat (mert lehet, hogy több, különálló kör is van), $2n$-nek egész számú többszörösét kell hogy kapjuk eredményül, mivel ezek a körök önmagukba térnek vissza, azaz helybenhagyás a forgatásaik összege. Ezzel ellentmondásra jutottunk, mert azt kaptuk, hogy $2n|F$, viszont $F=2n^2-n$ nem osztható $2n$-nel.

Kondacs Attila (Budapest, Árpád Gimn., III. o. t.)

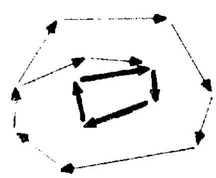
7. *Egy konvex poliéder éleit úgy irányítjuk, hogy minden csúcsban legyen oda vezető és onnan kiinduló él is. Bizonyítsuk be, hogy a poliédernek van legalább két lapja, amelyet az irányított élek mentén körbejárhatunk úgy, hogy minden élen az irányításnak megfelelően haladunk.*

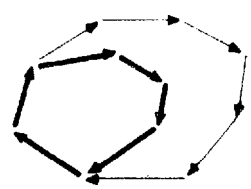
Megoldás. Az a tény, hogy minden csúcsban van oda bevezető és onnan kiinduló él is, biztosítja, hogy ha valamelyik csúcsból elindulva éleken keresztül haladunk (az irányításnak megfelelően) csúcsból csúcsba, *soha sem akadhatunk el;* vagyis nincs olyan csúcs, amelybe beérkezünk, de onnan nem tudunk továbbmenni.

Kezdjünk el egy ilyen „sétát” egy tetszőleges csúcsból kiindulva. Mivel véges sok csúcs van és nem akadhatunk el, előbb-utóbb olyan csúcsba vezet utunk, ahol korábban már voltunk. Amikor először jutunk már korábban érintett csúcsba, akkor álljunk meg. Legyen ez az utolsó csúcs a C csúcs. Tekintsük utunkat onnan kezdve, amikor először érintettük C-t. Innen kezdve utunk egy önmagát nem metsző körút, hiszen csupán a C csúcs az, amelyiket 2-szer érintettünk utunk során.



Ez a körút két részre osztja a poliéder felületét. Azt fogjuk megmutatni, hogy mindkét részen van olyan lap, amely élei mentén körbejárható. Ezt elég az egyik részen belátni, a másik részen hasonló gondolatmenetet használhatunk. Válasszuk ki tehát az egyik részt, és egy a határon levő olyan csúcsból induljunk el a rész belseje felé, ahonnan indul ki ilyen bevezető él (mint pl. $\overrightarrow{CA}$). Ha csak kivezető élek vannak (mint pl. $\overrightarrow{BO}$), akkor az egész poliéderen megváltoztatva minden él irányítását, a körutak és így a lapkörutak ugyanott lesznek, ahol eddig, ezek a kivezető élek viszont bevezetőkké válnak, így elindulhatunk befelé. A kezdeti bevezető éllel újra egy sétát kezdünk el, amely, mivel részünkön csak véges sok csúcs van, előbb-utóbb vagy egy már érintett csúcsba vezet, vagy egy határcsúcsba (ábra).





Mindkét esetben új körút alakul ki a részünkön belül (vastag vonal) úgy, hogy ez a körút néhány lapot határol körül a részen belül, de nem a rész összes lapját. Ez a kevesebb lap alkotja majd az új részt, amelyre az előbbi eljárás megismételendő. Az eljárás addig folytatható, amíg az éppen aktuális rész határoló csúcsaiból van bevezető, vagy azokba kivezető él a részből. Ez mindaddig fönnáll, amíg a rész 1-nél több lapot tartalmaz. Mivel minden lépésnél az új rész kevesebb lapot tartalmaz, mint az előbbi, és az első rész véges sok lapot tartalmaz, véges sok lépésben eljutunk addig, hogy az aktuális rész egy lapot tartalmaz, és így ez a lap élei mentén körüljárható.

Tehát az eredetileg kiválasztott részben van megfelelő lap, és hasonló gondolatmenettel igazolható, hogy a komplementer részben is. Így igazoltuk, hogy van legalább két olyan lap, amely élei mentén körbejárható.

Máté Nóra (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o. t.)

8. *Legyenek x_1, x_2, …, x_k olyan pozitív számok, amelyek összege egyenlő szorzatukkal; legyen továbbá $n \geq k$ pozitív egész. Bizonyítsuk be, hogy*

$$x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \cdots + x_k^{n-1} \geq kn.$$

Milyen esetben teljesül az egyenlőség?

Megoldás. Alkalmazzuk a számtani-mértani közép közti összefüggést az x_1, $x_2, \ldots,$ x_k számokra. A feltételt is figyelembe véve kapjuk, hogy:

$$\frac{x_1x_2\ldots x_k}{k} = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_k}{k} \geq \sqrt[k]{x_1x_2\ldots x_k}, \tag{1}$$

azaz

$$x_1x_2\dots x_k > k^{\frac{k}{k-1}}.$$

A hatványközepekre vonatkozó tétel azt mondja ki, hogy ha α és β két olyan valós szám, amelyekre $\alpha > \beta$, akkor $h(\alpha) \geq h(\beta)$ tetszőleges $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_k$ pozitív számokra, és egyenlőség akkor és csak akkor állhat fenn, ha $x_1 = x_2 = \dots = x_k$.

$\left(\text{Megjegyzés: } h(\omega) = \left(\frac{x_1^\omega + x_2^\omega + \dots + x_k^\omega}{k}\right)^{\frac{1}{\omega}}, \text{ ha } \omega \neq 0, \text{ és } h(0) = \sqrt[k]{x_1x_2\dots x_k}.\right)$

Nyilván $2 \leq k \leq n$, ezért $n-1 > 0$, így

$$\left(\frac{x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_k^{n-1}}{k}\right)^{\frac{1}{n-1}} = h(n-1) \geq h(0) = \sqrt[k]{x_1x_2\dots x_k} \geq k^{\frac{1}{k-1}},$$

(1) miatt.

A kívánt egyenlőtlenség igazolásához belátjuk, hogy $k^{\frac{1}{k-1}} \geq n^{\frac{1}{n-1}}$, azaz hogy az $a_z = \sqrt[z-1]{z}$ sorozat ($z \geq 2$) szigorúan monoton fogyó. Viszont

$$\sqrt[z-1]{z} > \sqrt[z]{z+1}$$

valóban teljesül, mert:

$$z = \frac{(z-1)(z+1)+1}{z} = \frac{\overbrace{(z+1)+(z+1)+\dots+(z+1)}^{z-1 \text{ darab}}+1}{z} >$$
$$> \sqrt[z]{\underbrace{(z+1)(z+1)\dots(z+1)}_{z-1 \text{ darab}}\cdot 1} = (z+1)^{\frac{z-1}{z}}.$$

A feladat egyenlőtlenségében akkor és csak akkor állhat fenn egyenlőség, ha $x_1 = x_2 = \dots = x_k = x$ és $n = k$, azaz ha $kx^{n-1} = kn$; $x = \sqrt[n-1]{n} = \sqrt[k-1]{k}$. És ha minden x_i ezt a közös x értéket veszi fel, akkor teljesül az is, hogy a szorzatuk egyenlő az összegükkel.

Benkő Dávid (Budapest, Móricz Zs. Gimn., IV. o. t.)