

1. Adott a következő kifejezés:

$$F(x, y) = \frac{x^3 - x^2y + xy^2 - x - y^3 + y}{x^3 - x^2y + xy^2 + x - y^3 - y}.$$

a) Egyszerűsítse $F(x, y)$ -t.

b) Mutassa meg, hogy ha $x = \frac{k(1-z^2)}{1+z^2}$ és $y = \frac{2+z}{1+z^2}$, akkor $F(x, y)$ nem függ z -től!

2. Az m valós paraméter milyen értékeire lesz a következő egyenletrendszer megoldható?

$$\begin{aligned} 3x + y &= 2, \\ x + 2y &= m + 8, \\ (m - 4)x + y &= -10. \end{aligned}$$

3. Egy r sugarú és m magasságú egyenes körkúp alakú edény magassága feléig folyadékkal van töltve. Fordítsuk meg a kúpot úgy, hogy a csúcsa legyen lefelé. A csúcstól számítva milyen magasan lesz a folyadék az edényben?

4. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

$$a) \quad x^{\log_x(x-2)^2} = g; \quad b) \quad x^{\log_{x^2}(x^2-5)} = 2.$$

5. Legyenek a, b, c egy mértani sorozat egymásutáni elemei. Igazolja, hogy ekkor

$$\frac{1}{3} \leq \frac{ax^2 + bx + c}{ax^2 - bx + c} \leq 3.$$

6. Oldja meg azt a másodfokú egyenletet, amelynek gyökei kielégítik a következő összefüggéseket:

$$\begin{aligned} 4x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) &= -4, \quad \text{és} \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) &= \frac{1}{1+p}. \end{aligned}$$

Határozza meg a p értékét úgy, hogy $x_1^2 + x_2^2 = 11$ legyen!

7. Oldja meg a következő egyenletet:

$$3\cos^2\alpha + \cos 2\alpha - 2\cos\alpha - \sin 2\alpha - \sin\alpha = 0.$$

8. Egy derékszög egyik szárán felvesszük az A és B rögzített pontokat, a másik szárán pedig a változó L pontot. A derékszög O csúcsának az LA , illetve LB egyenesre eső vetülete P , illetve Q .

a) Igazolja, hogy a PQ egyenes a derékszög AB szárát egy rögzített M pontban metszi.

b) Határozza meg, hogy milyen arányban osztja az M pont az AB szakaszt!