A középkor alkimistái egész életüket a bölcsek köve keresésére pazarolták, melynek segítségével fémtárgyakat arannyá reméltek varázsolni. Hogy a probléma általuk választott megközelítése mennyire helytelen volt, azt *Banach* és *Tarski* lengyel matematikusok századunk elején publikált tétele is mutatja. A „józan" ésszel szöges ellentétben álló, és ezért rendszerint paradoxonnak nevezett tétel – pongyolán fogalmazva – azt állítja, hogy lehetséges egy bármilyen kicsiny aranydarabkából egy tetszőlegesen nagyot előállítani csupán feldarabolás és a részek átrendezése segítségével. A továbbiakban ezt pontosan megfogalmazzuk, majd elemi eszközökkel belátjuk.

Jelölések

$\cup$, $\cap$ halmazok uniója, metszete
$A \Leftrightarrow B$ $A$ és $B$ kölcsönösen egymásba darabolható
$A \to B$ $A$ értemezési tartományú, $B$ értékkészletű függvény
$A \leftrightarrow B$ bijekció a két halmaz között (vagy ennek hozzárendelési szabálya)
$A \subseteq B$ $A$ részhalmaza $B$-nek
$A \setminus B$ $A$ azon elemei, melyek $B$-nek nem elemei

A tér egy $H$ ponthalmazát *korlátos*nak nevezzük, ha létezik olyan $d$ konstans, hogy $H$ bármely $A$, $B$ pontjaira $AB < d$.

A tér egy ponthalmazát a továbbiakban *telt*nek hívjuk, ha (részhalmazként) tartalmaz nem nulla sugarú gömböt. Például egy kocka belseje telt, de a gömbfelszín nem az.

Bontsuk fel a $H$ ponthalmazt páronként *diszjunkt* (közös elemet nem tartalmazó) részhalmazokra: $H = H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup \ldots$. Alkalmazzunk mindegyik $H_i$re egy-egy egybevágósági transzformációt, azaz mozgassuk el $H_i'$-be. Legyen $H' = H_1' \cup H_2' \cup \ldots$. Ekkor azt mondjuk, hogy $H$ átdarabolható $H'$-be. Hogy ez az átrendezés valóban emlékeztessen a fizikai térben is végrehajtható átdarabolásra, megköveteljük, hogy a részhalmazok száma véges és a $H_i'$ halmazok is páronként diszjunktak legyenek. Így az átdarabolhatóság kölcsönös tulajdonság, melyet így jelölünk: $H \Leftrightarrow H'$.

A bevezetésben említett paradoxont a következőképpen fogalmazhatjuk meg:

**1. Tétel.** Legyen $A$ és $B$ korlátos és telt ponthalmaz; ekkor $A \Leftrightarrow B$.

A bizonyításhoz lemmák sorozatán keresztül jutunk el, melyek önmagukban is érdekes tényeket fejeznek ki.

**1. Lemma.** Minden körvonal átdarabolható egy vele azonos sugarúba, melynek egy pontja hiányzik.

Legyen az adott kör középpontja $O$, kerületének tetszőleges pontja $P_0$. Ekkor a körvonalat a belőle $P_0$ elhagyásával kapott alakzatba kell átdarabolnunk. Válasszuk a teljes szöget (360°) egységnyinek, és legyen $w$ tetszőleges irracionális szám. Forgassuk el $P_0$-t $O$ körül $w$, $2w$, $3w$, $\ldots$, $iw$, $\ldots$ szögegységgel, így a $P_1$, $P_2$, $P_3, \ldots$, $P_i$, $\ldots$ pontokat kapjuk. Az $i \mapsto P_i$ ($i$=0, 1, 2, $\ldots$) megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű. Ha ugyanis $P_i$ egybeesik $P_j$-vel, akkor $iw - jw$ a teljes szög egy többszöröse kell, hogy legyen, azaz $iw - jw = k$ egész. Ha $i \neq j$, akkor $w = \dfrac{k}{i-j}$ ellentmondana $w$ irracionalitásának, tehát $i = j$.

Legyen $H_1 = \{P_1,\ P_2,\ \ldots\}$, $H_2$ pedig a körvonal maradék része. $H_2$-t hagyjuk helyben, $H_1$-et pedig forgassuk el $O$ körül $w$ szögegységgel; ekkor $P_i$ $P_{i+1}$-be kerül, $P_0$ helyébe pedig semmi; ez tehát egy kívánt átdarabolás.

Vegyük észre, hogy maga a „bűvésztrükk", egy pont eltüntetése, azon alapult, hogy az $i \mapsto i+1$ megfeleltetéssel a természetes számok egy valódi részhalmazukra képezhetők le.

A továbbiakban még egy halmazelméleti fogalomra lesz szükségünk.

Ha két halmaz elemei között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés (bijekció) létesíthető, akkor a két halmazt azonos *számosságúnak* nevezzük; *megszámlálhatónak* hívjuk azokat a halmazokat, melyek a természetes számok halmazával azonos számosságúak.

Az elnevezés kissé megtévesztő; voltaképpen azt kell azon érteni, hogy a halmaz elemei természetes számokkal elláthatók, megszámozhatók. Mivel a most következő tény inkább átgondolást, mint bizonyítást igényel, ezért feladatként közöljük.

*1. Feladat.* A természetes számok minden részhalmaza vagy véges, vagy megszámlálható.

A következő alaptétel *G. Cantor*tól, a halmazelmélet megalapítójától származik.

**2. Tétel.** Legyen $I$ egy intervallum, és $H$ az $I$ megszámlálható részhalmaza. Ekkor létezik $I$-nek olyan $x$ eleme, ami nincs benne $H$-ban. ($I$ tehát nem megszámlálható.)

$I$-nek nyilván van $\left(\dfrac{n}{10^k}, \dfrac{n+1}{10^k}\right)$ alakú részintervalluma, ahol $n$ egész, $k$ pedig pozitív egész. Rendeljük hozzá $H$ elemeihez rendre a természetes számokat. Egy megfelelő $x = 10^{-k} \cdot (\overline{n, d_0 d_1 d_2 d_3 \ldots})$ számhoz juthatunk, ha a $d_i$ tizedesjegyeket a következőképpen választjuk: legyen $d_i = 1$, ha $H$-nak az $i$-vel megcímkézett elemét tizedestört alakba írva, a tizedesvessző utáni $(1 + k + i)$-edik számjegy 2-es; minden más esetben legyen $d_i = 2$. Ez az $x$ valóban eleme $I$-nek, s mivel tizedestört alakjában valahonnan kezdve kizárólag 1-esek és 2-esek szerepelnek, így egy másik számmal csak úgy lehet egyenlő, ha azzal tizedesjegyről tizedesjegyre megegyezik. Ez azonban $H$ egyetlen elemére sem állhat fenn, hiszen $x$ a $H$ „$i$-edik" elemétől a tizedesvessző utáni $(1 + k + i)$-edik helyen biztosan különbözik.

Mielőtt az 1. tétel bizonyításához fognánk, megmutatjuk, hogy már a síkon is van olyan alakzat, amely átdarabolással megkétszerezhető.

**3. Tétel.** A síkban létezik két diszjunkt ponthalmaz, $A$ és $B$ úgy, hogy $A$ és $B$ is egybevágó $A \cup B$-vel; röviden szólva: *A megduplázható.*

Először belátjuk, hogy van olyan $w$, amelyre a $z = \cos\, w + i \cdot \sin\, w$ komplex szám nem gyöke egyetlen egész együtthatós (nem azonosan nulla) egyváltozós polinomnak sem. Nevezzünk egy számot *algebrai*nak, ha az gyöke legalább egy egész együtthatós nem azonosan nulla egyváltozós polinomnak. A 2. tétel és az 1. feladat alapján elég mutatnunk egy kölcsönösen egyértelmű hozzárendelést a természetes számok egy részhalmaza és a $[0,\ 2\pi)$ intervallum azon $w$ elemei között, amelyekhez algebrai $z = \cos\ w + i \sin\ w$ szám tartozik.

Ehhez bevezetjük a következő függvényt az egész számok halmazán:

$$A(n) = \begin{cases} -2n, & \text{ha } \ n \leq 0, \\ 2n-1, & \text{ha } \ n \leq 0, \end{cases}$$

Könnyen látható, hogy $A$ bijekció az egész és a nemnegatív egész számok halmaza között. Legyen $w$ olyan, hogy a neki megfelelő $z$ gyöke az $a(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ egész együtthatós polinomnak. Az $a$-nak esetleg van másik 1 abszolút értékű gyöke is (többszörös gyököket nem számítva). Állítsuk ezeket sorba argumentumuk $[0,\ 2\pi)$ intervallumba eső értéke szerint; legyen $z$ a $p$-edik a növekvő sorrendben. Rendeljük most hozzá $w$-hez a következő természetes számot:

$$2^p \cdot 3^{A(a_0)} \cdot 5^{A(a_1)} \cdot 7^{A(a_2)} \cdot \ldots \cdot p_{n+1}^{A(a_n)},$$

ahol $p_i$ az $i$-edik páratlan prímszámot jelöli. Az olvasóra bízzuk annak igazolását, hogy a „dekódolás" is elvégezhető, azaz egy természetes számhoz legfeljebb egy $w$ tartozik.

Rögzítsünk most egy megfelelő (azaz nem algebrai) $z$ számot. Könnyű belátni, hogy semelyik $u$ komplex szám sem állítható elő két különböző módon $a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ alakban, ahol $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n$ természetes számok. Valóban,

$$u = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = a'_n z^n + a'_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a'_1 z + a'_0 \quad (a_i,\ a'_i \in N),$$

az egyenlőséget nullára redukálva, azt jelentené, hogy $z$ algebrai. $z$ azonban csak az azonosan nulla polinomnak gyöke, így a fenti két polinom azonosan egyenlő. Ennek segítségével már megadhatjuk a kívánt $A$, $B$ halmazokat.

Az $A$ ponthalmaz álljon a komplex sík azon pontjaiból, melyek előállíthatók $a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 \quad (a_i \geq 0$, egész) alakban úgy, hogy $a_0 \neq 0$; alkossák továbbá a $B$ ponthalmazt a komplex sík azon pontjai, amelyek előállíthatók $a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z$ alakban ($a_0,\ a_1,\ \ldots$ nemnegatív egészek).

Toljuk el $A$-t a $-1$ vektorral; ill. forgassuk el $B$-t az origó körül $-w$ radiánnal (azaz szorozzuk meg az $\frac{1}{z}$ számmal). Az olvasó könnyen ellenőrizheti, hogy mindkét módon az $A \cup B$ halmazhoz jutunk, vagyis azoknak a pontoknak az összességéhez, amelyek előállnak egy nemnegatív egész együtthatójú egyváltozós polinom $z$ helyen felvett értékeként.

Most már csakugyan hozzáláthatunk az 1. tétel bizonyításához vezető út első, hosszadalmasabb feléhez, melyet a paradoxon gyenge formájának is neveznek.

**4. Tétel.** A gömb megduplázható.

Az igazoláshoz szükségünk lesz az átdarabolhatóság tranzitivitására, melynek igazolását az olvasóra bízzuk.

*2. feladat.* Ha $A \Leftrightarrow B$ és $B \Leftrightarrow C$, akkor $A \Leftrightarrow C$.

Innen már következik, hogy ha $X \Leftrightarrow Y$, és $X$ megduplázható, akkor $Y$ is megduplázható.

Rögzítsünk egy gömböt, legyen a középpontja $O$. Legyenek $r_1$ és $r_2$ $O$-n átmenő egyenesek. Jelölje $R_1^+$ a gömb egy $r_1$ tengelyű forgatását, $R_1^-$ pedig ennek a forgatásnak az inverzét (az azonos tengelyű, ellentétes szögű forgatást; $R_1^-$-nak természetesen $R_1^+$ az inverze); hasonlóan értelmezzük az $R_2^+$ és $R_2^-$ forgatásokat is. E forgatások ismételt alkalmazásával a gömbnek önmagára való leképezéseit kapjuk.

$R_1^+$, $R_1^-$, $R_2^+$ és $R_2^-$ minden olyan egymás utáni véges sokszori alkalmazását, amelyben semelyik forgatást sem követi közvetlenül az inverze, „szó"-nak nevezzük. (A kissé rejtélyes név eredetére később fény derül.) Pl. $R_2^- R_1^+$ egy szó, amely azt jelenti, hogy először $R_1^+$ majd $R_2^-$-t alkalmazzuk; $R_2^+ R_2^+ R_1^+ R_1^-$ azonban nem szó. A gömb helyben hagyását, azaz a forgatások egyikének sem alkalmazását „üres szó"-nak nevezzük, és $I$-vel jelöljük.

A következő kulcsfontosságú tétel, az egyetlen, mely lényegileg kihasználja a tér geometriáját, *Hausdorff*tól származik, 1914-ből. (Egy szó mindig a gömb leképezése önmagára, így két szót akkor mondunk egyenlőnek, ha ugyanazt a leképezést hozzák létre.)

**2. Lemma.** Léteznek olyan $R_1^{\pm}$ és $R_2^{\pm}$ forgatások, amelyekből alkotható egyetlen szó sem egyenlő az üres szóval.

A található sok példa közül a legegyszerűbbet idézzük; legyen $O$ egy térbeli koordináta-rendszer origója: a tengelyek a $z$, ill. $x$ egyenesek, a forgatások szöge pedig $\operatorname{Arc}\cos\frac{1}{3}$. A bizonyítást, mivel inkább számolgatást igényel, csak vázoljuk. Szimmetria-okokból elegendő azokat a szavakat vizsgálni, melyek $R_1^+$-ra végződnek; a szó hosszára vonatkozó indukcióval belátható, hogy minden ilyen szó az $(1,\,0,\,0)$ pontot olyan pontba viszi, melynek koordinátái $\left(\frac{a}{3^k},\ \frac{b\sqrt{2}}{3^k},\ \frac{c}{3^k}\right)$ alakúak, ahol $a$, $b$ és $c$ egészek, és $b$ nem osztható 3-mal; tehát már $(1,\,0,\,0)$-nak a képe sem lehet önmaga, így a szó nem a helyben hagyás.

Vezessük be ezután a következő műveletet szavak között: a két szónak megfelelő transzformáció egymás utáni alkalmazását a két szó szorzatának nevezzük és egymás mellé írással jelöljük. Legyen pl. $w_1 = R_2^- R_1^+ R_1^+$ és $w_2 = R_1^- R_1^-$. A közvetlenül kapott transzformáció $w_1 w_2 = R_2^- R_1^+ R_1^+ R_1^- R_1^-$ nem feltétlenül egy szó. Azonban a közvetlenül egymásután következő inverz forgatásokat, mivel egymást lerontják, lépésről lépésre kiiktathatjuk; $R_2^- R_1^+ R_1^+ R_1^- R_1^- \to R_2^- R_1^+ R_1^- \to R_2^-$. Így könnyen látható, hogy két szó szorzatával mindig egyenlő egy (esetleg az üres) szó.

Szükségünk lesz még ennek a szorzásnak az asszociativitására is: $(w_1 w_2) w_3 = w_1 (w_2 w_3) = w_1 w_2 w_3$; ez a tér transzformációinak nyilvánvaló tulajdonsága.

Ugyancsak nyilvánvaló, hogy tetszőleges $w$ szóra $Iw = wI = w$.

*3. Feladat.* Igazoljuk, hogy minden $w$ szónak van egy ($w^{-1}$-gyel jelölt) inverze, melyre $ww^{-1} = w^{-1}w = I$.

A továbbiakban rögzítsük a forgatásokat úgy, hogy a 2. lemma fennálljon, az ilyen forgatásokat függetlennek nevezzük. Ha most két szóra $w_1 = w_2$, akkor $w_1 w_2^{-1} = w_2 w_2^{-1} = I$; ez azonban csak akkor lehetséges, ha $w_1 w_2^{-1}$ az üres szóra egyszerűsödik le, ez pedig éppen azt jelenti, hogy két szó akkor és csak akkor egyenlő, ha pontosan ugyanazokat a forgatásokat pontosan ugyanabban a sorrendben tartalmazza.

Legyen $H$ a gömbfelület egy részhalmaza; azt a halmazt, melybe őt a $w$ viszi, $w(H)$-val jelöljük. Egy szó fixpontjának nevezzük azokat a $p$ pontokat, melyekre $w(p) = p$.

**3. Lemma.** A gömbfelület azon pontjainak a halmaza, melyek fixpontjai valamelyik szónak, megszámlálható.

Egy nemüres szónak legfeljebb kettő fixpontja lehet; ha ugyanis legalább három volna, azok közül kettő nem egy átmérő végpontja lenne, s így a rajtuk áthaladó főkör is fix lenne; ez azonban csak akkor fordulhatna elő, ha a szó helyben hagyás vagy síkra való tükrözés volna; az előbbi a 2. lemma szerint képtelenség, az utóbbi pedig azért lehetetlen, mert az elforgatások irányítástartók.

Egy szó fixpontja(i)hoz rendeljük hozzá a 0 (és 1) számokat, $R_1^+$, $R_1^-$, $R_2^+$ és $R_2^-$-nak pedig feleltessük meg rendre a 0, 1, 2, 3-at. Akkor minden fixponthoz egyértelműen hozzárendelhetünk egy ilyen alakú számot: $2^a \cdot 3^{a_1} \cdot 5^{a_2} \cdot 7^{a_3} \cdot \ldots \cdot p_n^{a_n}$, ahol $a$ 0 vagy 1, az $a_i$ kitevők pedig rendre a szóban szereplő forgatásokhoz rendelt számok. A fixpontok halmaza tehát az 1. feladat szerint (véges vagy) megszámlálható.

Legyen a fixpontok halmaza $F$, a gömbfelület maradék részét pedig jelölje $S$. Értelmezzünk egy relációt $S$ pontjai között: mondjuk azt, hogy a $Q$ pont a $P$ pontból *elérhető*, ha van olyan $w$ szó, amelyre $w(P) = Q$. Itt $w$ lehet az üres szó is, így az elérhetőség reflexív (minden pont elérhető önmagából); a 3. feladat állításából következik, hogy szimmetrikus ($P$ is elérhető $Q$-ból), a szavak összeszorozhatóságából pedig az, hogy tranzitív is. Az elérhetőség tehát ekvivalenciareláció, amely $S$ pontjait ekvivalenciaosztályokra bontja; egy ilyen osztály pontosan azokat a pontokat tartalmazza, melyek egymásból elérhetőek. Válasszunk ki minden egyes ilyen osztályból egy elemet, így kapjuk az $M$ halmazt. Megmutatjuk, hogy a $w(M)$ halmazok, ahol $w$ minden szón (az üresen is) átfut, $S$-nek páronként diszjunkt részekre való felbontását adják. Először azt látjuk be, hogy $w(M) \subseteq S$. Ez csak akkor nem volna igaz, ha létezne $S$-ben olyan $P$ pont és egy $w$ szó, hogy $w(P)$ fixpontja egy nemüres szónak, mondjuk $h$-nak: $h(w(P)) = w(P)$. Ez azt jelenti, hogy $w^{-1}hw(P) = w^{-1}w(P) = P$, ami csak úgy lehet, ha $w^{-1}hw = I$, azaz $h = w(w^{-1}hw)w^{-1} = wIw^{-1} = I$; ekkor azonban $h$ az üres szó, ami ellentmondás. Az $S$ halmaz minden pontja legalább egy $w(M)$-nek eleme: hiszen $S$ minden pontja valamelyik ekvivalenciaosztályba tartozik, így belőle egy szóval annak az osztálynak $M$-be beválasztott eleme megkapható. Végül $S$ minden pontja pontosan egy $w(M)$-nek eleme: ha ugyanis $w_1(P) = w_2(Q)$ ($P$ és $Q$ $M$-beli pontok), akkor $w_1^{-1}w_2(Q) = P$, tehát $P$ elérhető $Q$-ból, ami $M$ definíciója miatt csak akkor lehetséges, ha $P = Q$; de $w_1^{-1}w_2(P) = P$-ből (mivel $P$ csak az üres szónak fixpontja) $w_1 = w_2$ következik.

Osszuk be most az összes szót a következő négy részhalmazba:

$A_1$: az $R_1^+$-ra végződő szavak;
$A_2$: az $R_1^-$-ra végződő szavak;
$A_3$: az $R_2^+$-ra végződő szavak, $I$, valamint a csupa $R_2^-$-ból álló szavak, (pl. $R_2^-$, $R_2^-R_2^-$, $R_2^-R_2^-R_2^-$,...);
$A_4$: az $R_2^-$-ra végződő szavak, kivéve azokat, melyek csupán $R_2^-$-ból állnak.

(Végződésen azt értjük, hogy a szót alkotó forgatások közül melyiket alkalmaztuk utoljára; ez tehát a *bal* szélen álló „betű".)

Szorozzuk meg az $A_2$ minden szavát balról $R_1^+$-szal. Könnyen látható, hogy így $A_2$, $A_3$ és $A_4$ összes szavát pontosan egyszer megkapjuk, $A_1$ szavai közül azonban egyetlenegyet sem. Hasonlóan $A_4$ minden szavát $R_2^+$-szal szorozva $A_1$, $A_2$ és $A_4$ összes szavát nyerjük, de $A_3$-ból egyet sem. Fordítsuk most ezt le a geometria nyelvére: jelölje $M$ képeinek halmazát az összes $A_1$, $A_2$, $A_3$, ill. $A_4$-be tartozó szavak alkalmazásakor rendre $H_1$, $H_2$, $H_3$ és $H_4$. Ez a négy halmaz páronként diszjunkt, és az egyesítésük $S$. Alkalmazzuk az $R_1^+$ elforgatást $H_2$-re, így kapjuk $H_2 \cup H_3 \cup H_4$-et, mely $H_1$-gyel $S$ egy mását adja; hasonló a helyzet $H_3$-mal és $R_2^+(H_4)$-gyel. $S$-et ezzel megdupláztuk. $S$ azonban átdarabolható a teljes gömbfelületbe; ennek igazolásához csupán arra lesz szükségünk, hogy $F$ megszámlálható (lásd 3. Lemma). Legyen $r$ egy olyan $O$-n áthaladó egyenes, melynek nincs $F$-fel közös pontja (a 2. Tétel alkalmazásával könnyen igazolható, hogy tetszőleges gömbi főkörön áthalad legalább egy ilyen egyenes).

*4. Feladat.* Nevezzünk egy $r \in [0,\ 2\pi)$ szöget „rossznak", ha léteznek egymástól különböző $n$, $m$ természetes számok, melyekre teljesül, hogy $F$-et $r$ körül $nr$, ill. $mr$ szöggel elforgatva, az így kapott két halmaznak van közös pontja.

Igazoljuk, hogy a rossz szögek halmaza megszámlálható. A 2. tétel szerint kiválaszthatunk egy olyan $p$ szöget, amely „jó". $F$-et $r$ körül $p, 2p, \ldots, ip, \ldots$ szöggel elforgatva kapjuk rendre az $F_1, F_2, \ldots, F_i \ldots$ halmazokat; ezek páronként diszjunktak. Jelölje az összes $F_i$ egyesítését $H$; ez nyilván $S$ részhalmaza. $S$ maradék részét helyben hagyva, forgassuk el $H$-t $r$ körül $-p$ szöggel. $F_{i+1}$ ekkor éppen $F_i$-be kerül, $F_1$ pedig $F$-be, tehát az egész gömbfelületet megkaptuk.

Mindezidáig, jobbára kényelmi okokból, csak a gömbfelület átdarabolásáról beszéltünk. Figyeljük meg azonban, hogy a tér transzformációi közül kizárólag az $O$-n átmenő tengelyű forgatásokat használtunk. Ha megengedjük, hogy ezek a forgatások a felület pontjaival együtt a hozzájuk vezető sugarak egészét, – azoknak a gömb középpontjával egybeeső végpontja kivételével – mozgassák, megduplázhatjuk azt a testet, melyet a gömbből középpontja elhagyásával kapunk. Ez azonban az 1. lemma miatt (ha az ott szereplő kört a gömb belsejében vesszük fel) átdarabolható a gömbbe; így a 4. tétel bizonyítását befejeztük.

Ha egy gömb átdarabolható kettő, vele egybevágóba, akkor az így kapottak bármelyikét is tovább szaporíthatjuk, s indukcióval látszik, hogy egy gömb tetszőleges véges számú vele egybevágóba átdarabolható. Szükségünk lesz még a következőre:

**4. Lemma.** Ha $H \Leftrightarrow H'$ és $X \subseteq H$, akkor létezik olyan $Y \subseteq H'$, hogy $X \Leftrightarrow Y'$
(A lemma bizonyítását az olvasóra bízzuk.)

Az 1. tétel igazolásától látszólag még igen távol vagyunk, hiszen erősen kihasználtuk a gömb szimmetriáját. Azonban legalább annyi igaz, hogy a „kicsi" és a „nagy" közti különbség eltűnt: tetszőleges $A$ korlátos halmaz átdarabolható egy tetszőleges $B$ telt halmaz egy részhalmazába: a telt $B$-nek ugyanis van egy gömb részhalmaza; ennek a gömbnek véges sok másolatával $A$ lefedhető (helyenként többszörösen). A gömböknek ez a halmaza azonban átdarabolható egyetlen gömbbé, mely $B$-nek részhalmaza, így $A$ is átdarabolható $B$ egy részhalmazába.

Most már feltehetjük a „koronát" a paradoxon bizonyítására, *Schröder* és *Bernstein* egy halmazelméleti tételének *Banach* általi továbbfejlesztésével:

**5. Lemma.** Legyen $A_1 \subseteq A$ és $B_1 \subseteq B$. Ha $A_1 \Leftrightarrow B$ és $B_1 \Leftrightarrow A$, akkor $A \Leftrightarrow B$.

Vezessük be ehhez a következő jelöléseket:
f: az $A \Leftrightarrow B_1$ átdarabolás által definiált $A \to B_1$ függvény;
g : a $B \Leftrightarrow A_1$ átdarabolás által definiált $B \to A_1$ függvény.

(Ezek természetesen bijekciók.) $C_0 = A \setminus A_1$, legyen továbbá $C_{n+1} = g(f(C_n))$ ($n$=0, 1, 2, ...), végül legyen $C$ az összes $C_i$ halmaz uniója. Megmutatjuk, hogy $g(B \setminus f(C)) = A \setminus C$.

Ehhez először azt igazoljuk, hogy $g(B \setminus f(C)) \subseteq A \setminus C$. Nyilván $g(B) = A_1 \subseteq A$, így $g(B \setminus f(C)) \subseteq A$; be kell még látnunk, hogy $g(B \setminus f(C))$ és $C$ diszjunktak. Mivel $C_0$ diszjunkt a $g$ függvény értékkészletétől, ezért $C$ helyett elég a $C \setminus C_0$ halmazzal foglalkozni. Tudjuk, hogy $C = C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup \ldots$, így $g(f(C)) = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup \ldots \supseteq C \setminus C_0$. Ebből a $g^{-1}$ ($g$ inverze) alkalmazásával következik, hogy $f(C) \supseteq g^{-1}(C \setminus C_0)$, ahonnan látható, hogy $B \setminus f(C)$ és $g^{-1}(C \setminus C_0)$ diszjunktak. Ekkor diszjunktak ezek $g$-nél vett képei, azaz $g(B \setminus f(C))$ és $(C \setminus C_0)$ is.

A fordított irányú $g(B \setminus f(C)) \supseteq A \setminus C$ tartalmazás helyett azt mutatjuk meg, hogy $B \setminus f(C) \supseteq g^{-1}(A \setminus C)$. Világos, hogy $g(B) = A_1 = A \setminus C_0 \supseteq A \setminus C$, ezért $B \supseteq g^{-1}(A \setminus C)$.

Másrészt $g(f(C)) \subseteq C$ miatt $g(f(C)) \cap (A \setminus C)$ az üres halmaz, így ennek $g^{-1}$-nél vett képe, $f(C) \cap g^{-1}(A \setminus C)$ üres. Ezzel a kívánt tartalmazást, annak révén pedig a $g(B \setminus f(C)) = A \setminus C$ egyenlőséget beláttuk.

Mivel a $g$ függvény átdarabolást adott meg, ezért eredményünk alapján $B \setminus f(C) \Leftrightarrow A \setminus C$; nyilvánvalóan teljesül továbbá $f(C) \Leftrightarrow C$ is, tehát $B \Leftrightarrow A$.

Ezzel a lemma bizonyítását befejeztük. Megkaptuk a 4. tétel bizonyítását is, hiszen ha $A$ és $B$ tartalmaz egy-egy $G$, ill. $H$ gömböt, akkor a látottak alapján $A \Leftrightarrow H$ és $B \Leftrightarrow G$, tehát $A \Leftrightarrow B$.

Néhány éve egy rangos amerikai folyóirat egy matematikusnak az olvasói levelét közölte, melyben azt állítja, hogy a gömb megduplázására adott bizonyítást konstruktívvá alakította, majd a tettek mezejére lépett: tőkéjét aranyba és szerszámokba fektette, s habár technikai okok miatt csak jó „másfélszerez-nie" sikerült, ez már lehetővé tette, hogy iparát Dél-Amerikában kisipari módon folytassa. Az aranykezű matematikusnak, aki lombfűrészével még az elemi részecskéket is szét tudta hasogatni, csak elismerés járhat, éppúgy, mint a tudományos lapnak, mely komoly képpel leadta a hírt. S habár az anyag kvantált szerkezete nem teszi lehetővé, hogy a bevezetőben említett gondolatmenet tréfán túl másra is használható legyen, a paradoxon paradoxon marad: lehetetlen a térben minden ponthalmazhoz egy „térfogatot" rendelni, mely a halmaz közös elem nélküli részekre való felosztása, és egybevágósági transzformációkkal való elmozgatásával szemben invariáns. Fontos, hogy ebben a tényben ne a tér eredendő „megbízhatatlanságát" lássuk: minden végtelen halmaz tulajdonsága ugyanis, hogy egy valódi részhalmazával kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésbe hozható. A 4. tétel igazolásában a kulcs az $A_i$ halmazok léte; ez a konstrukció jó ideje ismert volt, mielőtt még független forgatásokat használva a gömbre alkalmazták volna (egy véges halmaz – „ábécé" – elemeinek egymás mellé írásával keletkező „szavak" alkotta absztrakt algebrai struktúrát szabad félcsoportnak hívjuk). A sík egybevágósági transzformációinak halmaza egyszerűbb, így területváltoztató átdarabolást nem enged meg (figyeljük meg, hogy a 3. tételben is megszámlálható sok pontból gyártottunk megszámlálhatóan sokat, ami a nulla terület megkettőzését jelentette csupán.)

*Bolyai Farkas* egy tétele szerint egyenlő területű sokszögek egymásba (geometriai értelemben) átdarabolhatók. Igazoljuk, hogy az ilyen sokszögek (a most tárgyalt értelemben is) átdarabolhatók egymásba.

*Megjegyzések.* Olvasóinknak bizonyára feltűnt, hogy az „átdarabolás" fogalmát a szokásos geometriai értelmezésétől eltérően vezettük be (lásd a KÖMAL 1989. évi 7. számában található cikket). Geometriában ugyanis átdarabolásnál csak egyenes vágásokat engedünk meg, és a vágások pontjait elhanyagoljuk, vagy többszörösen számoljuk.

Nemrég *Laczkovich Miklós* bebizonyította, hogy egy körlap átdarabolható azonos területű négyzetté.

**Beke Tibor,** egyetemi hallgató