A középkor alkimistái egész életüket a bölcsek köve keresésére pazarolták, melynek segítségével fémtárgyakat arannyá reméltek varázsolni. Hogy a probléma általuk választott megközelítése mennyire helytelen volt, azt *Banach* és *Tarski* lengyel matematikusok századunk elején publikált tétele is mutatja. A „józan" ésszel szöges ellentétben álló, és ezért rendszerint paradoxonnak nevezett tétel – pongyolán fogalmazva – azt állítja, hogy lehetséges egy bármilyen kicsiny aranydarabkából egy tetszőlegesen nagyot előállítani csupán feldarabolás és a részek átrendezése segítségével. A továbbiakban ezt pontosan megfogalmazzuk, majd elemi eszközökkel belátjuk.

Jelölések

$\cup$, $\cap$ halmazok uniója, metszete
$A \Leftrightarrow B$ A és B kölcsönösen egymásba darabolható
$A \to B$ A értemezési tartományú, B értékkészletű függvény
$A \leftrightarrow B$ bijekció a két halmaz között (vagy ennek hozzárendelési szabálya)
$A \subseteq B$ A részhalmaza B-nek
$A \setminus B$ A azon elemei, melyek B-nek nem elemei

A tér egy H ponthalmazát *korlátos*nak nevezzük, ha létezik olyan d konstans, hogy H bármely A, B pontjaira $AB < d$.

A tér egy ponthalmazát a továbbiakban *telt*nek hívjuk, ha (részhalmazként) tartalmaz nem nulla sugarú gömböt. Például egy kocka belseje telt, de a gömbfelszín nem az.

Bontsuk fel a H ponthalmazt páronként *diszjunkt* (közös elemet nem tartalmazó) részhalmazokra: $H = H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup \ldots$. Alkalmazzunk mindegyik $H_i$re egy-egy egybevágósági transzformációt, azaz mozgassuk el H_i'-be. Legyen $H' = H_1' \cup H_2' \cup \ldots$. Ekkor azt mondjuk, hogy H átdarabolható H'-be. Hogy ez az átrendezés valóban emlékeztessen a fizikai térben is végrehajtható átdarabolásra, megköveteljük, hogy a részhalmazok száma véges és a H_i' halmazok is páronként diszjunktak legyenek. Így az átdarabolhatóság kölcsönös tulajdonság, melyet így jelölünk: $H \Leftrightarrow H'$.

A bevezetésben említett paradoxont a következőképpen fogalmazhatjuk meg:

1. Tétel. Legyen A és B korlátos és telt ponthalmaz; ekkor $A \Leftrightarrow B$.

A bizonyításhoz lemmák sorozatán keresztül jutunk el, melyek önmagukban is érdekes tényeket fejeznek ki.

1. Lemma. Minden körvonal átdarabolható egy vele azonos sugarúba, melynek egy pontja hiányzik.

Legyen az adott kör középpontja O, kerületének tetszőleges pontja P_0. Ekkor a körvonalat a belőle P_0 elhagyásával kapott alakzatba kell átdarabolnunk. Válasszuk a teljes szöget (360°) egységnyinek, és legyen w tetszőleges irracionális szám. Forgassuk el P_0-t O körül w, $2w$, $3w$, $\ldots$, iw, $\ldots$ szögegységgel, így a $P_1,\ P_2,\ P_3, \ldots,\ P_i,\ \ldots$ pontokat kapjuk. Az $i \mapsto P_i$ (i=0, 1, 2, $\ldots$) megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű. Ha ugyanis P_i egybeesik P_j-vel, akkor $iw - jw$ a teljes szög egy többszöröse kell, hogy legyen, azaz $iw - jw = k$ egész. Ha $i \neq j$, akkor $w = \dfrac{k}{i-j}$ ellentmondana w irracionalitásának, tehát $i = j$.

Legyen $H_1 = \{P_1,\ P_2,\ \ldots\}$, H_2 pedig a körvonal maradék része. H_2-t hagyjuk helyben, H_1-et pedig forgassuk el O körül w szögegységgel; ekkor P_i P_{i+1}-be kerül, P_0 helyébe pedig semmi; ez tehát egy kívánt átdarabolás.

Vegyük észre, hogy maga a „bűvésztrükk", egy pont eltüntetése, azon alapult, hogy az $i \mapsto i+1$ megfeleltetéssel a természetes számok egy valódi részhalmazukra képezhetők le.

A továbbiakban még egy halmazelméleti fogalomra lesz szükségünk.

Ha két halmaz elemei között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés (bijekció) létesíthető, akkor a két halmazt azonos *számosságúnak* nevezzük; *megszámlálhatónak* hívjuk azokat a halmazokat, melyek a természetes számok halmazával azonos számosságúak.

Az elnevezés kissé megtévesztő; voltaképpen azt kell azon érteni, hogy a halmaz elemei természetes számokkal ellátható, megszámozhatók. Mivel a most következő tény inkább átgondolást, mint bizonyítást igényel, ezért feladatként közöljük.

1. Feladat. A természetes számok minden részhalmaza vagy véges, vagy megszámlálható.

A következő alaptétel *G.Cantor*tól, a halmazelmélet megalapítójától származik.

2. Tétel. Legyen I egy intervallum, és H az I megszámlálható részhalmaza. Ekkor létezik I-nek olyan x eleme, ami nincs benne H-ban. (I tehát nem megszámlálható.)

I-nek nyilván van $\left(\dfrac{n}{10^k}, \dfrac{n+1}{10^k}\right)$ alakú részintervalluma, ahol n egész, k pedig pozitív egész. Rendeljük hozzá H elemeihez rendre a természetes számokat. Egy megfelelő $x = 10^{-k} \cdot (\overline{n, d_0 d_1 d_2 d_3 \ldots})$ számhoz juthatunk, ha a d_i tizedesjegyeket a következőképpen választjuk: legyen $d_i = 1$, ha H-nak az i-vel megcímkézett elemét tizedestört alakba írva, a tizedesvessző utáni $(1+k+i)$-edik számjegy 2-es; minden más esetben legyen $d_i = 2$. Ez az x valóban eleme I-nek, s mivel tizedestört alakjában valahonnan kezdve kizárólag 1-esek és 2-esek szerepelnek, így egy másik számmal

csak úgy lehet egyenlő, ha azzal tizedesjegyről tizedesjegyre megegyezik. Ez azonban H egyetlen elemére sem állhat fenn, hiszen x a H „i-edik” elemétől a tizedesvessző utáni $(1+k+i)$-edik helyen biztosan különbözik.

Mielőtt az 1. tétel bizonyításához fognánk, megmutatjuk, hogy már a síkon is van olyan alakzat, amely átdarabolással megkétszerezhető.

3. Tétel. A síkban létezik két diszjunkt ponthalmaz, A és B úgy, hogy A és B is egybevágó $A \cup B$-vel; röviden szólva: *A megduplázható.*

Először belátjuk, hogy van olyan w, amelyre a $z = \cos\ w + i \cdot \sin\ w$ komplex szám nem gyöke egyetlen egész együtthatós (nem azonosan nulla) egyváltozós polinomnak sem. Nevezzünk egy számot *algebrai*nak, ha az gyöke legalább egy egész együtthatós nem azonosan nulla egyváltozós polinomnak. A 2. tétel és az 1. feladat alapján elég mutatnunk egy kölcsönösen egyértelmű hozzárendelést a természetes számok egy részhalmaza és a $[0,\ 2\pi)$ intervallum azon w elemei között, amelyekhez algebrai $z = \cos\ w + i \sin\ w$ szám tartozik.

Ehhez bevezetjük a következő függvényt az egész számok halmazán:

$$A(n) = \begin{cases} -2n, & \text{ha } \ n \leqq 0, \\ 2n-1, & \text{ha } \ n \leqq 0, \end{cases}$$

Könnyen látható, hogy A bijekció az egész és a nemnegatív egész számok halmaza között. Legyen w olyan, hogy a neki megfelelő z gyöke az $a(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ egész együtthatós polinomnak. Az a-nak esetleg van másik 1 abszolút értékű gyöke is (többszörös gyököket nem számítva). Állítsuk ezeket sorba argumentumuk $[0,\ 2\pi)$ intervallumba eső értéke szerint; legyen z a p-edik a növekvő sorrendben. Rendeljük most hozzá w-hez a következő természetes számot:

$$2^p \cdot 3^{A(a_0)} \cdot 5^{A(a_1)} \cdot 7^{A(a_2)} \cdot \ldots \cdot p_{n+1}^{A(a_n)},$$

ahol p_i az i-edik páratlan prímszámot jelöli. Az olvasóra bízzuk annak igazolását, hogy a „dekódolás” is elvégezhető, azaz egy természetes számhoz legfeljebb egy w tartozik.

Rögzítsünk most egy megfelelő (azaz nem algebrai) z számot. Könnyű belátni, hogy semelyik u komplex szám sem állítható elő két különböző módon $a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ alakban, ahol $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n$ természetes számok. Valóban,

$$u = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = a'_n z^n + a'_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a'_1 z + a'_0 \quad (a_i,\ a'_i \in N),$$

az egyenlőséget nullára redukálva, azt jelentené, hogy z algebrai. z azonban csak az azonosan nulla polinomnak gyöke, így a fenti két polinom azonosan egyenlő. Ennek segítségével már megadhatjuk a kívánt A, B halmazokat.

Az A ponthalmaz álljon a komplex sík azon pontjaiból, melyek előállíthatók $a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 \quad (a_i \geqq 0$, egész) alakban úgy, hogy $a_0 \neq 0$; alkossák továbbá a B ponthalmazt a komplex sík azon pontjai, amelyek előállíthatók $a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z$ alakban ($a_0,\ a_1,\ \ldots$ nemnegatív egészek).

Toljuk el A-t a –1 vektorral; ill. forgassuk el B-t az origó körül $-w$ radiánnal (azaz szorozzuk meg az $\dfrac{1}{z}$ számmal). Az olvasó könnyen ellenőrizheti, hogy mindkét módon az $A \cup B$ halmazhoz jutunk, vagyis azoknak a pontoknak az összességéhez, amelyek előállnak egy nemnegatív egész együtthatójú egyváltozós polinom z helyen felvett értékeként.

Most már csakugyan hozzáláthatunk az 1. tétel bizonyításához vezető út első, hosszadalmasabb feléhez, melyet a paradoxon gyenge formájának is neveznek.

4. Tétel. A gömb megduplázható.

Az igazoláshoz szükségünk lesz az átdarabolhatóság tranzitivitására, melynek igazolását az olvasóra bízzuk.

2. feladat. Ha $A \Leftrightarrow B$ és $B \Leftrightarrow C$, akkor $A \Leftrightarrow C$.

Innen már következik, hogy ha $X \Leftrightarrow Y$, és X megduplázható, akkor Y is megduplázható.

Rögzítsünk egy gömböt, legyen a középpontja O. Legyenek r_1 és r_2 O-n átmenő egyenesek. Jelölje R_1^+ a gömb egy r_1 tengelyű forgatását, R_1^- pedig ennek a forgatásnak az inverzét (az azonos tengelyű, ellentétes szögű forgatást; R_1^--nak természetesen R_1^+ az inverze); hasonlóan értelmezzük az R_2^+ és R_2^- forgatásokat is. E forgatások ismételt alkalmazásával a gömbnek önmagára való leképezéseit kapjuk.

R_1^+, R_1^-, R_2^+ és R_2^- minden olyan egymás utáni véges sokszori alkalmazását, amelyben semelyik forgatást sem követi közvetlenül az inverze, „szó”-nak nevezzük. (A kissé rejtélyes név eredetére később fény derül.) Pl. $R_2^- R_1^+$ egy szó, amely azt jelenti, hogy először R_1^+ majd R_2^--t alkalmazzuk; $R_2^+ R_2^+ R_1^+ R_1^-$ azonban nem szó. A gömb helyben hagyását, azaz a forgatások egyikének sem alkalmazását „üres szó”-nak nevezzük, és I-vel jelöljük.

A következő kulcsfontosságú tétel, az egyetlen, mely lényegileg kihasználja a tér geometriáját, *Hausdorff*tól származik, 1914-ből. (Egy szó mindig a gömb leképezése önmagára, így két szót akkor mondunk egyenlőnek, ha ugyanazt a leképezést hozzák létre.)

2. Lemma. Léteznek olyan $R_1^\pm$ és $R_2^\pm$ forgatások, amelyekből alkotható egyetlen szó sem egyenlő az üres szóval.

A található sok példa közül a legegyszerűbbet idézzük; legyen O egy térbeli koordináta-rendszer origója: a tengelyek a z, ill. x egyenesek, a forgatások szöge pedig $\operatorname{Arc}\cos\dfrac{1}{3}$. A bizonyítást, mivel inkább számolgatást igényel, csak vázoljuk.

Szimmetria-okokból elegendő azokat a szavakat vizsgálni, melyek R_1^+-ra végződnek; a szó hosszára vonatkozó indukcióval belátható, hogy minden ilyen szó az (1, 0, 0) pontot olyan pontba viszi, melynek koordinátái $\left(\frac{a}{3^k}, \frac{b\sqrt{2}}{3^k}, \frac{c}{3^k}\right)$ alakúak, ahol a, b és c egészek, és b nem osztható 3-mal; tehát már (1, 0, 0)-nak a képe sem lehet önmaga, így a szó nem a helyben hagyás.

Vezessük be ezután a következő műveletet szavak között: a két szónak megfelelő transzformáció egymás utáni alkalmazását a két szó szorzatának nevezzük és egymás mellé írással jelöljük. Legyen pl. $w_1 = R_2^- R_1^+ R_1^+$ és $w_2 = R_1^- R_1^-$. A közvetlenül kapott transzformáció $w_1 w_2 = R_2^- R_1^+ R_1^+ R_1^- R_1^-$ nem feltétlenül egy szó. Azonban a közvetlenül egymásután következő inverz forgatásokat, mivel egymást lerontják, lépésről lépésre kiiktathatjuk; $R_2^- R_1^+ R_1^+ R_1^- R_1^- \to R_2^- R_1^+ R_1^- \to R_2^-$. Így könnyen látható, hogy két szó szorzatával mindig egyenlő egy (esetleg az üres) szó.

Szükségünk lesz még ennek a szorzásnak az asszociativitására is: $(w_1 w_2) w_3 = w_1 (w_2 w_3) = w_1 w_2 w_3$; ez a tér transzformációinak nyilvánvaló tulajdonsága. Ugyancsak nyilvánvaló, hogy tetszőleges w szóra $Iw = wI = w$.

3. Feladat. Igazoljuk, hogy minden w szónak van egy (w^{-1}-gyel jelölt) inverze, melyre $ww^{-1} = w^{-1}w = I$.

A továbbiakban rögzítsük a forgatásokat úgy, hogy a 2. lemma fennálljon, az ilyen forgatásokat függetlennek nevezzük. Ha most két szóra $w_1 = w_2$, akkor $w_1 w_2^{-1} = w_2 w_2^{-1} = I$; ez azonban csak akkor lehetséges, ha $w_1 w_2^{-1}$ az üres szóra egyszerűsödik le, ez pedig éppen azt jelenti, hogy két szó akkor és csak akkor egyenlő, ha pontosan ugyanazokat a forgatásokat pontosan ugyanabban a sorrendben tartalmazza.

Legyen H a gömbfelület egy részhalmaza; azt a halmazt, melybe őt a w viszi, $w(H)$-val jelöljük. Egy szó fixpontjának nevezzük azokat a p pontokat, melyekre $w(p) = p$.

3. Lemma. A gömbfelület azon pontjainak a halmaza, melyek fixpontjai valamelyik szónak, megszámlálható.

Egy nemüres szónak legfeljebb kettő fixpontja lehet; ha ugyanis legalább három volna, azok közül kettő nem egy átmérő végpontja lenne, s így a rajtuk áthaladó főkör is fix lenne; ez azonban csak akkor fordulhatna elő, ha a szó helyben hagyás vagy síkra való tükrözés volna; az előbbi a 2. lemma szerint képtelenség, az utóbbi pedig azért lehetetlen, mert az elforgatások irányítástartók.

Egy szó fixpontja(i)hoz rendeljük hozzá a 0 (és 1) számokat, R_1^+, R_1^-, R_2^+ és R_2^--nak pedig feleltessük meg rendre a 0, 1, 2, 3-at. Akkor minden fixponthoz egyértelműen hozzárendelhetünk egy ilyen alakú számot: $2^a \cdot 3^{a_1} \cdot 5^{a_2} \cdot 7^{a_3} \cdot \ldots \cdot p_n^{a_n}$, ahol a 0 vagy 1, az a_i kitevők pedig rendre a szóban szereplő forgatásokhoz rendelt számok. A fixpontok halmaza tehát az 1. feladat szerint (véges vagy) megszámlálható.

Legyen a fixpontok halmaza F, a gömbfelület maradék részét pedig jelölje S. Értelmezzünk egy relációt S pontjai között: mondjuk azt, hogy a Q pont a P pontból *elérhető*, ha van olyan w szó, amelyre $w(P) = Q$. Itt w lehet az üres szó is, így az elérhetőség reflexív (minden pont elérhető önmagából); a 3. feladat állításából következik, hogy szimmetrikus (P is elérhető Q-ból), a szavak összeszorozhatóságából pedig az, hogy tranzitív is. Az elérhetőség tehát ekvivalenciareláció, amely S pontjait ekvivalenciaosztályokra bontja; egy ilyen osztály pontosan azokat a pontokat tartalmazza, melyek egymásból elérhetőek. Válasszunk ki minden egyes ilyen osztályból egy elemet, így kapjuk az M halmazt. Megmutatjuk, hogy a $w(M)$ halmazok, ahol w minden szón (az üresen is) átfut, S-nek páronként diszjunkt részekre való felbontását adják. Először azt látjuk be, hogy $w(M) \subseteq S$. Ez csak akkor nem volna igaz, ha létezne S-ben olyan P pont és egy w szó, hogy $w(P)$ fixpontja egy nemüres szónak, mondjuk h-nak: $h(w(P)) = w(P)$. Ez azt jelenti, hogy $w^{-1}hw(P) = w^{-1}w(P) = P$, ami csak úgy lehet, ha $w^{-1}hw = I$, azaz $h = w(w^{-1}hw)w^{-1} = wIw^{-1} = I$; ekkor azonban h az üres szó, ami ellentmondás. Az S halmaz minden pontja legalább egy $w(M)$-nek eleme: hiszen S minden pontja valamelyik ekvivalenciaosztályba tartozik, így belőle egy szóval annak az osztálynak M-be beválasztott eleme megkapható. Végül S minden pontja pontosan egy $w(M)$-nek eleme: ha ugyanis $w_1(P) = w_2(Q)$ (P és Q M-beli pontok), akkor $w_1^{-1}w_2(Q) = P$, tehát P elérhető Q-ból, ami M definíciója miatt csak akkor lehetséges, ha $P = Q$; de $w_1^{-1}w_2(P) = P$-ből (mivel P csak az üres szónak fixpontja) $w_1 = w_2$ következik.

Osszuk be most az összes szót a következő négy részhalmazba:

A_1: az R_1^+-ra végződő szavak;
A_2: az R_1^--ra végződő szavak;
A_3: az R_2^+-ra végződő szavak, I, valamint a csupa R_2^--ból álló szavak, (pl. $R_2^-, R_2^- R_2^-, R_2^- R_2^- R_2^-, \ldots$);
A_4: az R_2^--ra végződő szavak, kivéve azokat, melyek csupán R_2^--ból állnak.

(Végződésen azt értjük, hogy a szót alkotó forgatások közül melyiket alkalmaztuk utoljára; ez tehát a *bal* szélen álló „betű”.)

Szorozzuk meg az A_2 minden szavát balról R_1^+-szal. Könnyen látható, hogy így A_2, A_3 és A_4 összes szavát pontosan egyszer megkapjuk, A_1 szavai közül azonban egyetlenegyet sem. Hasonlóan A_4 minden szavát R_2^+-szal szorozva A_1, A_2 és A_4 összes szavát nyerjük, de A_3-ból egyet sem. Fordítsuk most ezt le a geometria nyelvére: jelölje M képeinek halmazát az összes A_1, A_2, A_3, ill. A_4-be tartozó szavak alkalmazásakor rendre H_1, H_2, H_3 és H_4. Ez a négy halmaz páronként diszjunkt, és az egyesítésük S. Alkalmazzuk az R_1^+ elforgatást H_2-re, így kapjuk $H_2 \cup H_3 \cup H_4$-et, mely H_1-gyel S egy mását adja; hasonló a helyzet H_3-mal és $R_2^+(H_4)$-gyel. S-et ezzel megdupláztuk. S azonban átdarabolható a teljes gömbfelületbe; ennek igazolásához csupán arra lesz szükségünk, hogy F megszámlálható (lásd 3. Lemma). Legyen

r egy olyan O-n áthaladó egyenes, melynek nincs F-fel közös pontja (a 2. Tétel alkalmazásával könnyen igazolható, hogy tetszőleges gömbi főkörön áthalad legalább egy ilyen egyenes).

4. Feladat. Nevezzünk egy $r \in [0,\ 2\pi)$ szöget „rossznak", ha léteznek egymástól különböző n, m természetes számok, melyekre teljesül, hogy F-et r körül nr, ill. mr szöggel elforgatva, az így kapott két halmaznak van közös pontja. Igazoljuk, hogy a rossz szögek halmaza megszámlálható.

A 2. tétel szerint kiválaszthatunk egy olyan p szöget, amely „jó". F-et r körül $p, 2p, \ldots, ip, \ldots$ szöggel elforgatva kapjuk rendre az $F_1, F_2, \ldots, F_i \ldots$ halmazokat; ezek páronként diszjunktak. Jelölje az összes F_i egyesítését H; ez nyilván S részhalmaza. S maradék részét helyben hagyva, forgassuk el H-t r körül $-p$ szöggel. F_{i+1} ekkor éppen F_i-be kerül, F_1 pedig F-be, tehát az egész gömbfelületet megkaptuk.

Mindezidáig, jobbára kényelmi okokból, csak a gömbfelület átdarabolásáról beszéltünk. Figyeljük meg azonban, hogy a tér transzformációi közül kizárólag az O-n átmenő tengelyű forgatásokat használtunk. Ha megengedjük, hogy ezek a forgatások a felület pontjaival együtt a hozzájuk vezető sugarak egészét, – azoknak a gömb középpontjával egybeeső végpontja kivételével – mozgassák, megduplázhatjuk azt a testet, melyet a gömbből középpontja elhagyásával kapunk. Ez azonban az 1. lemma miatt (ha az ott szereplő kört a gömb belsejében vesszük fel) átdarabolható a gömbbe; így a 4. tétel bizonyítását befejeztük.

Ha egy gömb átdarabolható kettő, vele egybevágóba, akkor az így kapottak bármelyikét is tovább szaporíthatjuk, s indukcióval látszik, hogy egy gömb tetszőleges véges számú vele egybevágóba átdarabolható. Szükségünk lesz még a következőre:

4. Lemma. Ha $H \Leftrightarrow H'$ és $X \subseteq H$, akkor létezik olyan $Y \subseteq H'$, hogy $X \Leftrightarrow Y'$
(A lemma bizonyítását az olvasóra bízzuk.)

Az 1. tétel igazolásától látszólag még igen távol vagyunk, hiszen erősen kihasználtuk a gömb szimmetriáját. Azonban legalább annyi igaz, hogy a „kicsi" és a „nagy" közti különbség eltűnt: tetszőleges A korlátos halmaz átdarabolható egy tetszőleges B telt halmaz egy részhalmazába: a telt B-nek ugyanis van egy gömb részhalmaza; ennek a gömbnek véges sok másolatával A lefedhető (helyenként többszörösen). A gömböknek ez a halmaza azonban átdarabolható egyetlen gömbbé, mely B-nek részhalmaza, így A is átdarabolható B egy részhalmazába.

Most már feltehetjük a „koronát" a paradoxon bizonyítására, *Schröder* és *Bernstein* egy halmazelméleti tételének *Banach* általi továbbfejlesztésével:

5. Lemma. Legyen $A_1 \subseteq A$ és $B_1 \subseteq B$. Ha $A_1 \Leftrightarrow B$ és $B_1 \Leftrightarrow A$, akkor $A \Leftrightarrow B$.

Vezessük be ehhez a következő jelöléseket:
f: az $A \Leftrightarrow B_1$ átdarabolás által definiált $A \to B_1$ függvény;
g : a $B \Leftrightarrow A_1$ átdarabolás által definiált $B \to A_1$ függvény.

(Ezek természetesen bijekciók.) $C_0 = A \setminus A_1$, legyen továbbá $C_{n+1} = g(f(C_n))$ (n=0, 1, 2, ...), végül legyen C az összes C_i halmaz uniója. Megmutatjuk, hogy $g(B \setminus f(C)) = A \setminus C$.

Ehhez először azt igazoljuk, hogy $g(B \setminus f(C)) \subseteq A \setminus C$. Nyilván $g(B) = A_1 \subseteq A$, így $g(B \setminus f(C)) \subseteq A$; be kell még látnunk, hogy $g(B \setminus f(C))$ és C diszjunktak. Mivel C_0 diszjunkt a g függvény értékkészletétől, ezért C helyett elég a $C \setminus C_0$ halmazzal foglalkozni. Tudjuk, hogy $C = C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup \ldots$, így $g(f(C)) = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup \ldots \supseteq C \setminus C_0$. Ebből a g^{-1} (g inverze) alkalmazásával következik, hogy $f(C) \supseteq g^{-1}(C \setminus C_0)$, ahonnan látható, hogy $B \setminus f(C)$ és $g^{-1}(C \setminus C_0)$ diszjunktak. Ekkor diszjunktak ezek g-nél vett képei, azaz $g(B \setminus f(C))$ és $(C \setminus C_0)$ is.

A fordított irányú $g(B \setminus f(C)) \supseteq A \setminus C$ tartalmazás helyett azt mutatjuk meg, hogy $B \setminus f(C) \supseteq g^{-1}(A \setminus C)$. Világos, hogy $g(B) = A_1 = A \setminus C_0 \supseteq A \setminus C$, ezért $B \supseteq g^{-1}(A \setminus C)$.

Másrészt $g(f(C)) \subseteq C$ miatt $g(f(C)) \cap (A \setminus C)$ az üres halmaz, így ennek g^{-1}-nél vett képe, $f(C) \cap g^{-1}(A \setminus C)$ üres. Ezzel a kívánt tartalmazást, annak révén pedig a $g(B \setminus f(C)) = A \setminus C$ egyenlőséget beláttuk.

Mivel a g függvény átdarabolást adott meg, ezért eredményünk alapján $B \setminus f(C) \Leftrightarrow A \setminus C$; nyilvánvalóan teljesül továbbá $f(C) \Leftrightarrow C$ is, tehát $B \Leftrightarrow A$.

Ezzel a lemma bizonyítását befejeztük. Megkaptuk a 4. tétel bizonyítását is, hiszen ha A és B tartalmaz egy-egy G, ill. H gömböt, akkor a látottak alapján $A \Leftrightarrow H$ és $B \Leftrightarrow G$, tehát $A \Leftrightarrow B$.

Néhány éve egy rangos amerikai folyóirat egy matematikusnak az olvasói levelét közölte, melyben azt állítja, hogy a gömb megduplázására adott bizonyítást konstruktívvá alakította, majd a tettek mezejére lépett: tőkéjét aranyba és szerszámokba fektette, s habár technikai okok miatt csak jó „másfélszereznie" sikerült, ez már lehetővé tette, hogy iparát Dél-Amerikában kisipari módon folytassa. Az aranykezű matematikusnak, aki lombfűrészével még az elemi részecskéket is szét tudta hasogatni, csak elismerés járhat, éppúgy, mint a tudományos lapnak, mely komoly képpel leadta a hírt. S habár az anyag kvantált szerkezete nem teszi lehetővé, hogy a bevezetőben említett gondolatmenet tréfán túl másra is használható legyen, a paradoxon paradoxon marad: lehetetlen a térben minden ponthalmazhoz egy „térfogatot" rendelni, mely a halmaz közös elem nélküli részekre való felosztása, és egybevágósági transzformációkkal való elmozgatásával szemben invariáns. Fontos, hogy ebben a tényben ne a tér eredendő „megbízhatatlanságát" lássuk: minden végtelen halmaz tulajdonsága ugyanis, hogy egy valódi részhalmazával kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésbe hozható. A 4. tétel igazolásában a kulcs az A_i halmazok léte; ez a konstrukció jó ideje ismert volt, mielőtt még független forgatásokat használva a gömbre alkalmazták volna (egy véges halmaz – „ábécé" – elemeinek egymás mellé

írásával keletkező „szavak” alkotta absztrakt algebrai struktúrát szabad félcsoportnak hívjuk). A sík egybevágósági transzformációinak halmaza egyszerűbb, így területváltoztató átdarabolást nem enged meg (figyeljük meg, hogy a 3. tételben is megszámlálható sok pontból gyártottunk megszámlálhatóan sokat, ami a nulla terület megkettőzését jelentette csupán.)

Bolyai Farkas egy tétele szerint egyenlő területű sokszögek egymásba (geometriai értelemben) átdarabolhatók. Igazoljuk, hogy az ilyen sokszögek (a most tárgyalt értelemben is) átdarabolhatók egymásba.

Megjegyzések. Olvasóinknak bizonyára feltűnt, hogy az „átdarabolás” fogalmát a szokásos geometriai értelmezésétől eltérően vezettük be (lásd a KÖMAL 1989. évi 7. számában található cikket). Geometriában ugyanis átdarabolásnál csak egyenes vágásokat engedünk meg, és a vágások pontjait elhanyagoljuk, vagy többszörösen számoljuk.

Nemrég *Laczkovich Miklós* bebizonyította, hogy egy körlap átdarabolható azonos területű négyzetté.

Beke Tibor, egyetemi hallgató