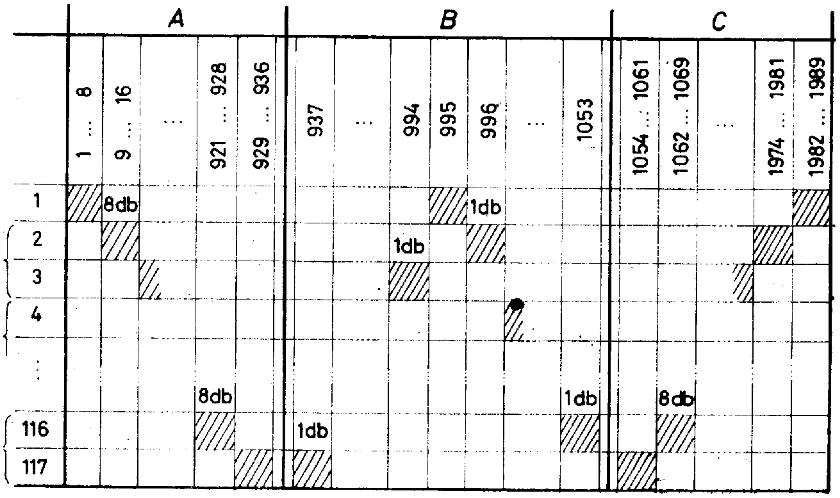
1. *Bizonyítsuk be, hogy az* $\{1,2,\ldots,1989\}$ *halmaz előáll* 117 *darab olyan diszjunkt halmaz,* $A_1, A_2, \ldots, A_{117}$ *egyesítéseként, amelyekre teljesül, hogy*

a) *mindegyiküknek* 17 *eleme van, továbbá, hogy*

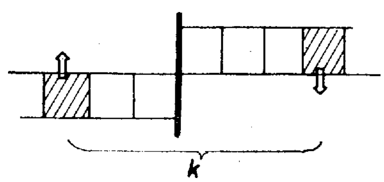
b) *mindegyikükben ugyanannyi az elemek összege.*

Az ilyen típusú feladatokra általában kétféle megoldás lehetséges. Az egyik csak a felosztás létezését igazolja, a másik megkonstruálja a felosztást is. Én ez utóbbit választottam. Sikerült találnom egy olyan módszert, amely két lépésben elkészíti a kívánt felosztást. Könnyen ellenőrizhető, hogy $1989 = 17 \cdot 117$. Ezt felhasználva első lépésben soroljuk be a számokat az ábrán látható módon.



1. ábra

Minden sorban pontosan 17 szám van, ezek alkotnak egy csoportot. Az első sorban a számok összege éppen megfelelő. Maradt 116 sorunk. Vizsgáljuk meg ezeket párosával az ábra szerint. Az A és C-vel jelzett csoportokban az egy sorban lévő számok összege mindenütt $995 \cdot 16$, tehát ugyanannyi. Csak a B-vel jelzett részben a „középső" satírozott elem változik. Minden egyes párban a B-ben lévő elem ugyanannyival tér el a 995-től, az egyikük nagyobb, a másikuk kisebb. Tehát két ilyen szomszédos sorban is megfelelő a számok együttes összege. Ha a szomszédos sorokat párosával rendbe tudjuk tenni, akkor készen is vagyunk.



2. ábra

Második lépésben tehát vegyük azt a párt, ahol a középső B-beli elemnek a 995-től való eltérése éppen d. (d 1-től 58-ig változhat, mert $2 \cdot 58 + 1 = 117$). A pár első sorában a kívánt értéktől való eltérés d, a másodikban $-d$. Ha a C-beli nyolcasokban kicserélünk az ábrán látható módon két számot, melyek egymástól k távolságra vannak ($1 \leqq k \leqq 15$), akkor az egyik sorban k-val nő, a másikban pedig k-val csökken az összeg. Ha $1 \leqq d \leqq 15$, akkor így egyetlen cserével helyrehozható az eltérés. Ha az eltérés nagyobb 15-nél, akkor a két szélsőt kicseréljük, és a maradék 14 számmal tetszőlegesen megmaradó különbség helyrehozható 1-től 13-ig. Ha még ez sem elég, akkor a 14 szám közül a két szélsőt ismét cseréljük ki. A maradék 12 számmal tetszőlegesen megmaradó különbség korrigálható 1-től 11-ig. Látható, hogy C-beli elemek alkalmas cseréjével tetszőleges eltérés korrigálható az alábbi határig:$15 + 13 + 11 + \ldots + 3 + 1 = 64$. Ez nagyobb mint 58, tehát mindegyik párnál elvégezhető a csere. Ezzel a feladatot megoldottuk.

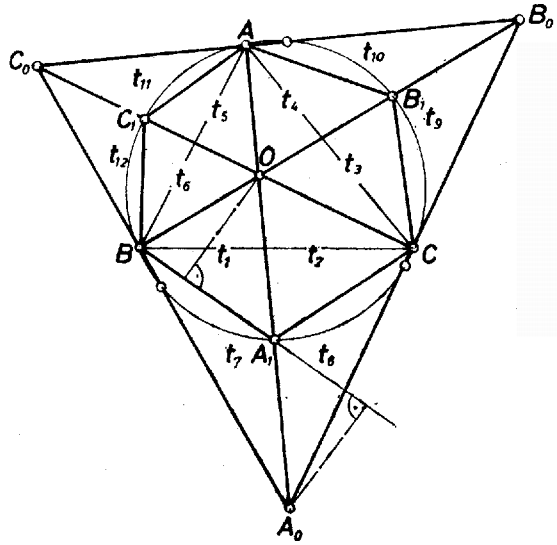
(Pásztor Gábor)

2. *A hegyesszögű* ABC *háromszög* A*-ból,* B*-ből és* C*-ből induló belső szögfelezői rendre az* A_1, B_1, *illetve* C_1 *pontban metszik a háromszög körülírt körét. Az* AA_1 *egyenest az* A_0 *pontban metszi a* B*- és a* C*-beli külső szögfelező és hasonlóan kapjuk a* B_0 *és a* C_0 *pontokat. Bizonyítsuk be, hogy*

i) *az* $A_0B_0C_0$ *háromszög területe egyenlő az* $AC_1BA_1CB_1$ *hatszög területének kétszeresével;*

ii) *az* $A_0B_0C_0$ *háromszög területe legalább négyszer akkora, mint az* ABC *háromszög területe.*

Mivel a háromszög egy szögének külső és belső szögfelezője merőleges egymásra, az A, B, C pontok az $A_0B_0C_0$ háromszögben a magasságvonalak talppontjai. Ismeretes, hogy egy háromszög Feuerbach-köre áthalad a magasságok talppontjain, az ABC háromszög köré írt köre tehát az $A_0B_0C_0$ háromszög Feuerbach-köre. A Feuerbach-kör áthalad az OA_0, OB_0, OC_0 felezőpontján is, ezért $OA_1 = A_1A_0$, $OB_1 = B_1B_0$, $OC_1 = C_1C_0$.



3. ábra

Jelöljük a kis háromszögek területét t_i-vel ($i = 1, 2, \dots 12$) az ábra szerint. Így $t_1 = t_7$, mert a két háromszög alapja és magassága egyenlő. Ugyanígy kapjuk, hogy $t_2 = t_8$, $t_3 = t_9$, $t_4 = t_{10}$, $t_5 = t_{11}$, $t_6 = t_{12}$. Ezeket összeadva:

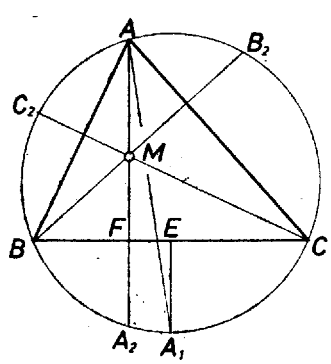
$$t_1 + t_2 + \dots + t_6 = t_7 + t_8 + \dots + t_{12}.$$

Mindkét oldalhoz hozzáadva az egyenlet bal oldalát:

$$2(t_1 + t_2 + \dots + t_6) = t_1 + t_2 + \dots + t_{12}$$

ami éppen a bizonyítandó állítás.

A második állítás igazolásához ezután elegendő belátni, hogy az $AC_1BA_1CB_1$ hatszög területe legalább kétszerese az ABC háromszög területének.



4. ábra

Jelöljük az ABC háromszög magasságpontjának az oldalakra vonatkoztatott tükörképeit rendre A_2, B_2, C_2-vel. Ismert, hogy ezek a pontok a körülírt körön vannak. Az A_1 pont a BC ív (A-t nem tartalmazó ívének) felezőpontja, mert BA_1 és CA_1 ívekhez tartozó kerületi szögek egyenlők, tehát az A_1E szakasz (E a BC szakasz felezőpontja) nem kisebb az A_2F szakasznál (F az A_2 vetülete BC-re).

Ezért $t_{BA_1C} \geqq t_{BA_2C}$. Hasonlóan kapjuk, hogy $t_{CB_1A} \geqq t_{CB_2A}$, $t_{AC_1B} \geqq t_{AC_2B}$. Az egyenlőtlenségek megfelelő oldalait összeadva

$$t_{BA_1C} + t_{CB_1A} + t_{AC_1B} \geqq t_{BA_2C} + t_{CB_2A} + t_{AC_2B}.$$

A jobb oldalon éppen az ABC háromszög területe áll, mert a kis háromszögeket tükrözve az oldalegyenesekre A_2, B_2, C_2 pontok tükörképe éppen a magasságpont, és így a tükörképek egyrétűen fedik le az ABC háromszöget.

Azaz

$$t_{BA_1C} + t_{CB_1A} + t_{AC_1B} \geqq t_{ABC}.$$

Mindkét oldalhoz hozzáadva t_{ABC}-t

$$t_{ABC} + t_{BA_1C} + t_{CB_1A} + t_{AC_1B} \geqq 2t_{ABC}.$$

Így éppen a bizonyítandó állítást kapjuk, mert a bal oldal 4 háromszöge éppen lefedi az $AC_1BA_1CB_1$ hatszöget.

Egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha A_1 és A_2, B_1 és B_2, C_1 és C_2 egybeesik, ami azt jelenti, hogy a háromszög minden alapról nézve egyenlő szárú, tehát szabályos. Szabályos háromszögben pedig nyilván fennáll az egyenlőség.

(Pásztor Gábor)

3. *Legyenek az n és a k adott pozitív egész számok, az S pedig olyan n-elemű síkbeli ponthalmaz, amelynek*

a) *semelyik három pontja nincs egy egyenesen;*

b) *az S halmaz minden P pontjához található legalább k darab S-beli pont, amelyek mind egyenlő távolságra vannak a P ponttól.*

Bizonyítsuk be, hogy

$$k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}.$$

Sajnos a feladatra a magyar versenyzők egyike sem talált megoldást – utólag ez bizonyult a verseny legnehezebb feladatának.

A megoldás első lépése a bizonyítandó egyenlőtlenség valamivel megfoghatóbb, beszédesebb alakban történő felírása. Rendezés után négyzetre emelve

$$k^2 - k + \frac{1}{4} < 2n,$$

azaz

$$\frac{k^2-k}{2} + \frac{1}{8} < n$$

adódik. A bal oldal első tagja egész, így elegendő igazolnunk, hogy

$$\frac{k^2-k}{2} \leqq n-1.$$

A bal oldalon éppen $\binom{k}{2}$, a k elem közül választható párok száma áll.

A halmaz minden P pontjához tekintsük tehát a tőle egyenlő távolságra lévő k darab S-beli pontból készíthető pontpárokat. Így összesen

$$n \cdot \binom{k}{2}$$

pontpárt kapunk. Ha most egy S-beli (A, B) pontpárt számba veszünk egy P pontnál, akkor a P rajta van az AB felezőmerőlegesén. Mivel az S-ben nincs három egy egyenesre eső pont, a fenti leszámolás során tetszőleges S-beli pontpárt legfeljebb kétszer kaphatunk meg, azaz

$$n \cdot \binom{k}{2} \leqq 2 \cdot \binom{n}{2} = n \cdot (n-1),$$

ahonnan n-nel osztva éppen a bizonyítandó állítást kapjuk.

Megjegyzés. A feladat állítása úgy is teljesül, ha elhagyjuk azt a feltételt, hogy nincs három egy egyenesre eső S-beli pont, ennek bizonyítására most nem térünk ki.

(Pataki János)

4. *A konvex $ABCD$ négyszög AB, BC és AD oldalaira teljesül, hogy $AB = AD + BC$. A négyszög belsejében úgy helyezkedik el a P pont, hogy $AP = h + AD$ és $BP = h + BC$, ahol h éppen a P pontnak a CD egyenestől mért távolsága. Bizonyítsuk be, hogy*

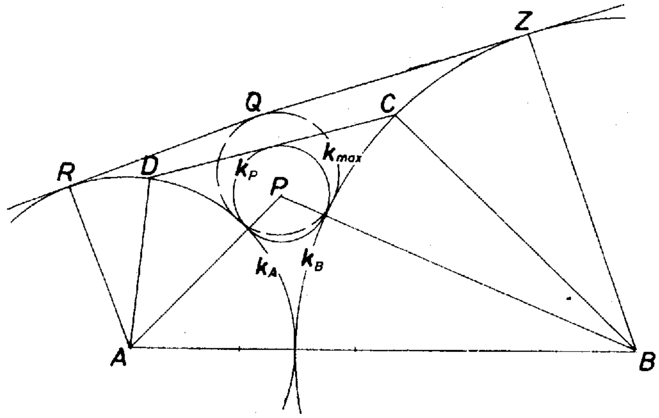
$$\frac{1}{\sqrt{h}} \geqq \frac{1}{\sqrt{AD}} + \frac{1}{\sqrt{BC}}.$$

A 2. napon az első nap már elég jól bevált taktikát akartam követni, vagyis a geometria feladattal kezdeni. Az első sikertelen másfél óra után váltottam csak az 5. feladatra. Azt megoldva tértem vissza a 4.-re, és ez „be is jött”.

Az első nehézséget maga az állítás okozta. Mit kezdjek szakaszok négyzetgyökeinek reciprokával? Könnyebben értelmezhetőnek tűnt ehelyett a $\sqrt{AD \cdot BC} \geqq \sqrt{h \cdot AD} + \sqrt{h \cdot BC}$ állítást igazolni. Ezeknek a következő geometriai jelentést tulajdoníthatjuk: könnyen ellenőrizhető, hogy $2\sqrt{xy}$ nem más, mint x és y sugarú egymást kívülről érintő körök közös érintőszakasza.

A következő részcél ilyen körök keresése a négyszögben. Itt sikerült hasznosítanom az első másfél órám eredményeit is. Ez az idő a következő ötletre „ment rá”. Rögzítsük AD, BC hosszát, változtassuk h hosszát, majd egy-egy $((AD; BC; h)$ hármashoz próbáljunk $ABCD$ négyszög(ek)et szerkeszteni.

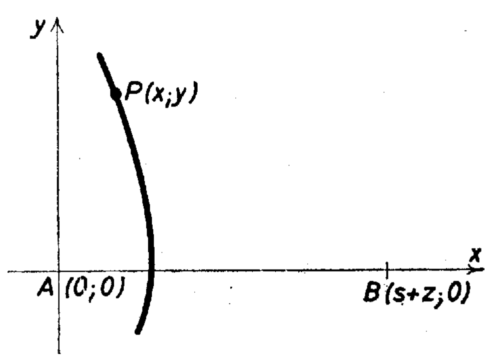
Mivel $AB = AD + BC$; $AP = AD + h$; $BP = BC + h$, ezért ekkor az ABP háromszög megszerkeszthető. A C pont mértani helye a B körüli, BC sugarú k_B kör, a D ponté a hasonló k_A kör. A CD szakasz pedig érinti a P körüli, h sugarú k_P kört. Megvan a három kör! Annak a feltétele, hogy létrejöjjön legalább egy „jó” $ABCD$ négyszög, az, hogy legyen a k_P körnek olyan érintője, amelynek van közös pontja a k_A és k_B körökkel is, méghozzá úgy, hogy a metszéspontok az AB egyenes P felőli partján legyenek, (hogy a négyszög konvex legyen). Ehhez az nyilván elégséges, hogy k_P teljesen az AB felőli partján legyen k_A és k_B közös külső érintőinek; legfeljebb érintse. De ez szükséges is, mert ellenkező esetben a következő igaz: a k_A és k_B bármely X, illetve Y pontját összekötve, ez a szakasz a közös érintő alatt AB felé eső részén) halad, így k_P-t csak oly módon érintheti, ha P a létrejövő $XYAB$ négyszög külső pontja.



1. ábra

Az volt az elképzelésem, hogy igazolom a $\sqrt{AD \cdot BC} \geqq (\sqrt{AD} + \sqrt{BC})\sqrt{h}$ helyességét. Látható, hogy h változtatásával a bal oldal állandó, a jobb oldal pedig ugyanolyan irányban változik. Ha belátnánk, hogy h maximumakor egyenlőség áll fenn, akkor készen lennénk. Az 1. ábrát tanulmányozva észrevehetjük, hogy ha k_P érinti k_A és k_B közös érintőjét, akkor $RQ = 2 \cdot \sqrt{AD \cdot h}$; $QZ = 2 \cdot \sqrt{BC \cdot h}$; $RZ = 2 \cdot \sqrt{AD \cdot BC}$, és $RQ + QZ = RZ$. Azaz itt egyenlőség áll fenn. Vonzónak tűnik belátni, hogy h erre az esetre maximális. Ekkor már az egyenlőség feltétele is megvan: az $ABCD$ derékszögű trapéz ($ADC\sphericalangle = DCB\sphericalangle = 90°$). Ezt nem túl elegáns úton sikerült befejeznem. Találhattam volna szebb módot is, de az elkövetkezőkben felhasznált részeredményeim már hamarabb elkészültek, így ez tűnt a leggyorsabb útnak.

Legyen koordinátarendszerünk középpontja az A pont, $A(0;0)$; legyen $AD = s$, $BC = z$ és feltehető, hogy $BC \geqq AD$. Mivel $BP - AP = BC - AD =$ konstans, ezért h változtatásával P egy fél hiperbola ágon mozoghat (2. ábra). Ezen látszik, hogy ha x csökken, az y nő (ez az egyenessé torzult hiperbolánál ($AD = BC$) is elfogadható). Belátjuk, hogy h növelésével x csökken (vagy állandó marad, az egyenes esetén), azaz y nő. Így egyre feljebb kerül k_P azon S pontja, amelyre $SP \perp AB$ és S a P fölött van. Ez a pont tehát egyre feljebb kerül, de az érintőnél levő helyzetnél nem mehet tovább. Így valóban az érintőnél lesz h maximális.



2. ábra

Ugyanakkor a $P(x;y)$ pontra $AP = s + h$ azaz
(1) $x^2 + y^2 = (s+h)^2$; $BP = z + h$, azaz
(2) $(s+z-x)^2 + y^2 = (z+h)^2$;
ezek különbségéből

$$x = \frac{(s+z) + (s-z)(s+z+2h)}{2(s+z)}.$$

Ez egy elsőfokú függvénye h-nak, és az együtthatója $\dfrac{s-z}{2(s+z)} \leqq 0$; azaz h növelésével y is nő. Vagyis állításunkat beláttuk.

(Benczúr Péter)

5. *Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n-hez található n darab szomszédos pozitív egész szám úgy, hogy egyikük sem egyenlő egy prímszám pozitív egész kitevőjű hatványával.*

Egy egész szám pontosan akkor nem prímhatvány, ha van két relatív prím valódi osztója. Keressük az n darab számot

$$\{2+M, 3+M, \ldots, (n+1)+M\} \tag{1}$$

alakban.

Ha $i|M$, $2 \leqq i \leqq n+1$ esetén és $M = i \cdot m_i$, akkor

$$i + M = (1 + m_i).$$

Innen látszik, hogy ha még $i|m_i$ is teljesül, akkor

$$(i, 1 + m_i) = 1,$$

és így minden 1-nél nagyobb i-re $i+M$ előáll két 1-nél nagyobb relatív prím szám szorzataként, tehát nem prímhatvány.

Ha tehát $i^2|M$, $i = 2, 3, \ldots, n+1$, akkor az (1) alatti számok egyike sem prímhatvány; a talált feltétel pedig biztosan teljesül az $M = [(n+1)!]^2$ választással. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

(Pataki János)

6. *Az $1, 2, \ldots, 2n-1, 2n$ számok egy $x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}$ permutációját nevezzük jónak, ha van olyan $i \in \{1, 2, \ldots, 2n-1\}$, amelyre $|x_i - x_{i+1}| = n$.*

Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n-re az $1, 2, \ldots, 2n-1, 2n$ számok összes permutációjának több mint a fele jó.

A megoldásból talán látható, miért ez a feladat tetszik legjobban az összes közül, hiszen elkerüli a leszámolást vagy a becslést. Eleinte én is becsülgetős, vagy indukciós megoldást akartam adni, azonban mikor ez nem sikerült, és a másik két feladat eléggé felbosszantott, úgy döntöttem, hogy ezt hamar megoldom, ami sikerült is. Eleinte magam sem akartam elhinni, hisz mégis a hatodik – a zsűri által a legnehezebbnek tartott – feladatról van szó, de sokszori átgondolás után sem találtam hibát, így kényszerűen elhittem, hogy elegáns megoldást leltem.

Megadok egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést, mely a nem jó permutációkat leképezi a jók egy részhalmazára.

Minden $1 \leqq i \leqq 2n$ egész számra az i párjának nevezem azt a k egész számot, melyre $1 \leqq k \leqq 2n$ és $|i-k| = n$. Így az $1, 2, \ldots, 2n$ számokat párokba soroltam.

Tekintem a nem jó $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2n}$ permutációt. Legyen az x_{2n} párja x_k.
Ekkor e rossz permutáció megfelelője az

$$x_1, x_2, \ldots, x_k, x_2n, \ldots, x_{2n-1}$$

jó permutáció lesz, hisz $|x_k - x_{2n}| = n$. A nem jó permutációk megfelelői azon jó permutációk lesznek, melyekre

$$\exists i \in \{1, 2, \ldots, 2n-1\}, \quad \text{hogy} \quad |x_i - x_{i+1}| = n$$

és ezen i-re, $i \neq 2n-1$, tehát egyetlen szomszédos pár nincs a permutáció végén. Az így kapott jó permutációk mindegyikéből rekonstruálható az eredeti nem jó, tehát a megfeleltetés valóban kölcsönösen egyértelmű.

Ez azt jelenti, hogy a nem jó permutációk száma azonos az előbbi típusú, jó, permutációk számával.

Ezen permutációk pedig kevesebben vannak, mint a jók, hisz az $1, n+1$ végű jó permutációk nem tartoznak a rosszak képeihez.

(Fleiner Tamás)