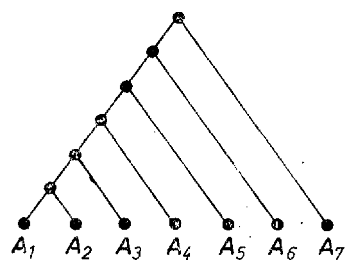
Hány teniszmérkőzésre van szükség, hogy n játékos közül kiválasszuk a legjobbat? Kétkarú mérleg segítségével, n db tárgy közül hány méréssel tudjuk kiválasztani a második legnehezebbet? Ezek a kérdések a számítógép-tudomány egyik legfontosabb fejezetének, a rendezések elméletének alapproblémái. A válaszadáshoz algoritmust, tehát tervet kell készítenünk a mérések végrehajtására, s ha az optimális algoritmust akarjuk megtalálni, arra is képesnek kell lennünk, hogy bebizonyítsuk: nincs jobb.

A programozás elmélete általában a következő modellt alkalmazza. Adva van n adat, $A_1, \ldots, A_n$, amelyek valamilyen sorrendben rendezve vannak. Ez a sorrend számunkra ismeretlen, de akármikor összehasonlíthatunk bármely két adatot, ezáltal megkapva egymáshoz viszonyított elhelyezkedésüket. Cél a legnagyobb, második legnagyobb stb. elem meghatározása, a lehető legkevesebb összehasonlítással. Logikus lenne feltenni, hogy adataink valós, vagy akár természetes számok, például sportbeli megfogalmazásokban pontszámok. Ezt általában mégsem teszik fel, ugyanis az összehasonlításokból csak a sorrendre következtethetünk, a számok értékére nem. (Szigorúan véve, csak annyit tudunk, hogy adataink között van egy ismeretlen reláció, ami rendelkezik a „kisebb” reláció szokásos tulajdonságaival, vagyis tranzitív és trichotóm.) A következő leírásokban időnként használni fogjuk a sportélet természetesen adódó kifejezéseit.

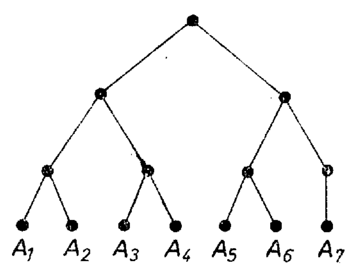
1. tétel. n adat közül $n-1$ összehasonlítással ki lehet választani a legnagyobbat.

2. tétel. n adat közül a legnagyobb kiválasztásához mindig legalább $n-1$ összehasonlításra van szükség.

Az 1. tétel bizonyítása. Két módszert is megadunk. Az elsőben (1. ábra), először A_1-et és A_2-t hasonlítjuk össze, majd a „nyertes”-t A_3-mal, és így tovább. Ez az úgynevezett „kihívásos” módszer, amikor az egymás utáni mérkőzések során mindig a nyertes marad a (pingpong, sakk stb.) asztalnál.



1. ábra



2. ábra

A másik módszer fordulók rendezése (2. ábra). A játszmaszám itt is $n-1$, hiszen (ugyanúgy, mint az előbb) bármelyik résztvevő egyetlen vesztes játszma után kiesik, és a legjobbat kivéve mindenki kiesik. (A játszmák számának közvetlen, szintenkénti összeszámolása kissé nehezebb: Jelöljük $f(x)$-szel a szükséges játszmaszámot. Nyilván $f(1)=0$. Ha $x>1$ természetes szám, és $2 \leqq x \leqq 2y+1$, akkor a legalsó szinten y játszma van, a fölötte levő szinteken pedig $x-y$ játékos játszik kieséses játékokat. Tehát $f(x)=y+f(x-y)$, és ebből indukcióval könnyen igazolhatjuk $f(x)=x-1$-et.)

A 2. tétel bizonyítása. Az eddig elmondottak után ez már igen egyszerű: a nyertesen kívüli $n-1$ játékos mindegyikének vesztenie kell valamikor (különben nem tudhatnánk biztosan, hogy nem ő a legjobb), s minden mérkőzésnek egy vesztese van.

A továbbiakhoz jelöljük r-rel azt a természetes számot, amire $2^{r-1} < n \leqq 2^r$ teljesül. Ekkor a 2. ábra r-fordulós rendszert ad, amiben a győztes éppen r-szer játszik.

3. tétel. n adat közül a második legnagyobb $n+r-2$ összehasonlítással megtalálható.

Bizonyítás. A 2. ábra szerinti módszerrel $n-1$ összehasonlítással megtaláljuk a legnagyobb elemet. Minden ettől különböző elem „kikapott” valamelyiktől. A második legnagyobb csak a legnagyobbtól kaphatott ki, ő tehát a legnagyobb által közvetlenül legyőzött r elem valamelyike. Ezek közül kell tehát a legnagyobbat megtalálnunk, amit az 1. tétel bármelyik módszerével $r-1$ összehasonlítással megtehetünk. Ez összesen $n-1+r-1=n+r-2$ összehasonlítás.

4. tétel. Nincs olyan algoritmus, amely minden esetben $n+r-2$-nél kevesebb összehasonlítással megtalálná a második legnagyobb elemet.

Bizonyítás. Itt már nem igaz, mint a 2. tételben, hogy minden esetben legalább ennyi összehasonlítás kellene. Ha szerencsénk van, az 1. ábra módszerével $n-1$ összehasonlítás is elég lehet (ha mindig erősebb és erősebb új játékos jön).

Tételezzük fel, hogy valamilyen eljárással, bizonyos számú összehasonlítás után meghatároztuk az M-mel jelölt második legnagyobb elemet. Biztosan tudjuk tehát, hogy M nem a legnagyobb, tehát valamelyik összehasonlításban „veszített". De csak a (mondjuk L-lel jelölt) legnagyobb elemmel szemben veszíthetett, így L és M mindenképpen összehasonlításra került. Így valahogyan meggyőztük magunkat, hogy M a második legnagyobb, és $L > M$-et is tudjuk, tehát mindenképpen tudjuk, hogy L a legnagyobb. Kaptuk tehát, hogy a második legnagyobb elem meghatározásához meg kell találnunk a legnagyobb elemet is, így a 2. tétel szerint mindenképpen legalább $n-1$ összehasonlítást tennünk kellett.

Jelölje p azon összehasonlítások számát, amelyekben L részt vett. Így van p elem, ami L-től kikapott, közöttük van M. Az M-től különböző $p-1$ elemről biztosan tudjuk, hogy nem a második legjobbak. Ez csak úgy lehet, hogy ezek még valami mástól is kikaptak. Összesen tehát van $(n-1)-(p-1)=n-p$ olyan elem, ami legalább egyszer, és $p-1$ további elem, ami legalább kétszer kikapott; így a vesztesek, tehát a játszmák száma legalább $(n-p)+2(p-1)=n+p-2$. Ha valahogy garantálni tudnánk $p \geqq r$-et, készen lennénk.

Belátjuk, hogy minden algoritmusnak van olyan lehetséges kimenetele, amiben $p \geqq r$ és ezzel a bizonyítás kész. Egy algoritmus minden lépése egy $A_i - A_j$ összehasonlítás, és hogy mi az i és a j, az az előző lépésektől függhet. Hogy a fentiek szerinti kívánatos kimenetelt meghatározhassuk, meg kell adnunk az összehasonlítások eredményeit. Mivel azt akarjuk, hogy a leendő nyertes lehetőleg minél több összehasonlításban vegyen részt, célszerű két játékos közül azt nyertesnek nyilvánítani, aki addig többször játszott.

A szabály tehát ez: ha A_i és A_j is veretlen, győzzön az, aki eddig többször játszott; ha egyforma sokat játszottak, győzzön bármelyik. Ha A_i veretlen, de A_j már kikapott, nevezzük ki A_i-t győztesnek, ha pedig már mindkét résztvevőnek van veresége, mindegy, hogy kit kiáltunk ki győztesnek. Önkényes kijelöléseinkkel bajba kerülhetünk, ha olyan $A_i - A_j$ párost kell összehasonlítani, amelyről az előző játszmák alapján tudjuk például, hogy $A_i > A_j$. Algoritmusunkról azonban feltehetjük, hogy ilyen (új információt nem adó) lépéseket nem tesz.

Be kell még látnunk, hogy e választások garantálják $p \geq r$-et. Tegyük fel, hogy a mérkőzéssorozat elkezdése előtt minden játékos felírja egy cédulára a nevét, és első veresége alkalmából átadja a nála összegyűlt cédulákat legyőzőjének. így a torna alatt a cédulák ide-oda vándorolnak, minden pillanatban, valamilyen eloszlásban, a pillanatnyi veretlenek kezeiben vannak. A végén, minden cédula a győztes, L kezében lesz.

Igazoljuk, hogy a torna folyamán mindig igaz lesz a következő állítás:

Ha az A_i veretlen játékos eddig x-szer játszott, akkor nála legfeljebb 2^x cédula van. Ezt x-re vonatkozó indukcióval látjuk be; $x=0$-ra igaz, hiszen csak a saját cédulája lehet nála. Ha A_i A_j-vel játszik, a nála levő cédula-kollekciót csak úgy bővítheti, ha legyőzi az A_j addig veretlen játékost. Ha A_j addig y-szor játszott, akkor $x \geqq y$-nak kell teljesülnie előírásaink szerint. Így A_j (az indukció miatt) legfeljebb 2^y cédulát adhat át, így A_i, aki $x+1$-szer játszott, most legfeljebb $2^x+2^y \leqq 2^x+2^x=2^{x+1}$ cédulát birtokolhat. Állításunkat így indukcióval bizonyítottuk. A torna végén minden cédula a győztes, L kezében lesz, így fenti állításunk szerint $2^p \geqq n > 2^{r-1}$, azaz $p \geqq r$ adódik, s ezt akartuk belátni.

Még egy olyan érdekes eset van, amikor az optimális összehasonlítás-számot ismerjük. Legyen x az a természetes szám, amire $2x+1 \leqq n \leqq 2x+2$ teljesül.

5. tétel. n adat közül $n+x-1$ összehasonlítással meghatározhatjuk a legnagyobbat és a legkisebbet is.

Bizonyítás. A 2. ábra módszerével $n-1$ összehasonlítás elég a legnagyobb meghatározására. A legkisebb adat nem lehet az 1. forduló nyertesei között, így a többi $x+1$ elem valamelyike. Közülük az 1. tétel módszerével x méréssel megkaphatjuk a legkisebb elemet.

6. tétel. Nincs olyan algoritmus, amely minden esetben $n+x-1$-nél kevesebb összehasonlítással határozná meg egyidejűleg a legkisebb és a legnagyobb elemet.

Bizonyítás. A 4. tétel bizonyításához hasonlóan azt látjuk be, hogy bármelyik algoritmusnak tudjuk olyan megtörténését konstruálni, ami legalább $n+x-1$ összehasonlítást használ.

Az algoritmus, illetve a mérkőzéssorozat minden fázisához rendeljük hozzá az $\frac{1}{2}a+\frac{3}{2}b$ pontszámot, ahol a jelöli az adott pillanatban azon játékosok számát, akik már veszítettek, de még nem nyertek játékot, vagy fordítva: nyertek, de még nem vesztettek, b pedig azok számát jelöli, akik veszítettek is, nyertek is.

Kezdetben ez a pontszám nyilván 0. A játéksorozat végén tudjuk, ki a legjobb, ez csak úgy lehet, ha egy játékos kivételével mindegyik vesztett valamikor. Tudjuk ki a legrosszabb, azaz egy (másik) kivételével mindegyik nyert valamikor. Innen adódik, hogy a pontszám $\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{3}{2}\cdot(n-2)=\frac{3}{2}n-2$. Ha el tudjuk érni, hogy minden játszmánál legfeljebb eggyel nőjön ez a pontszám, akkor a játszmák száma legalább $\frac{3}{2}n-2$ lesz. $n=2x+2$-re ez $3y+1=n+x-1$, $n=2x+1$-re pedig $\frac{3}{2}n-2=3x-\frac{1}{2}$, azaz a játékok száma legalább $3x=n+x-1$.

A kívánt feltétel teljesíthetősége esetszétválasztással könnyen ellenőrizhető. Az érdekes esetek azok, amikor két veretlen, két nyeretlen, illetve két olyan játékos találkozik, akik még nem játszottak. Ilyenkor a pontszám eggyel nő.

Befejezésül szeretném felhívni az érdeklődő olvasók figyelmét Gács Péter és Lovász László Algoritmusok című könyvecskéjére (Műszaki Kiadó, 1978, második kiadás: Tankönyvkiadó, 1987), amely számos, a fentiekhez hasonló problémát, megoldási módszert ismertet, igen olvasmányosan. Cikkünk témakörének igen alapos elméleti, történeti elemzését adja, számos általánosítást, kiterjesztést is ismertet D. E. Knuth: A számítógép-programozás művészete 3. Keresés és rendezés című monográfiája (Műszaki Kiadó, 1988), a 226–238. oldal között.

Megjegyzések. 1. A 3. és 4. tétel állítása szerepel *Bartha G. és mások:* Matematikai feladatok gyűjteménye I. Tankönyvkiadó 1988. feladatgyűjteményben, a 317/b feladatban, 410. oldal. Mivel a feladat megoldása nem nyilvánvaló, úgy éreztük a bizonyítást részletezni kell. E célból jelent meg ez a cikk.

2. Az 5. tétel n-ről $(n+2)$-re történő indukcióval is bizonyítható.