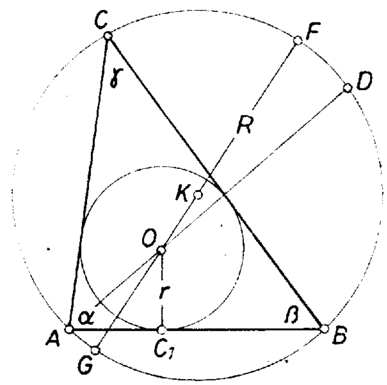
Leginkább talán Euler tételeként ismert az az összefüggés, amelyben egy háromszög beírt és köréírt köre középpontjának a távolságát e körök sugarának segítségével fejezzük ki. Ennek az összefüggésnek nyilvánvaló következménye az a tény, hogy a körülírt kör sugara legalább akkora, mint a beírt kör sugarának a kétszerese. Három példát mutatunk be a továbbiakban annak érzékeltetésére, hogyan hozható kapcsolatba e két kör sugarának aránya a háromszög oldalaival, ill. szögeivel. Előbb azonban bebizonyítjuk az eredeti összefüggést.

Legyen ABC egy háromszög. A háromszögbe, valamint a háromszög köré írható kör középpontját O-val és K-val, e körök sugarait pedig r-rel és R-rel jelöljük. (A háromszög oldalaira és szögeire a szokásos jelöléseket használjuk.)



Kössük össze az A és O pontokat; a kapott egyenes a háromszög köré írt kört messe D-ben. Hasonlóan legyenek az OK által meghatározott átmérő végpontjai F és G (1. ábra). Írjuk fel a szelőtételt az AD és FG szakaszokra :

$$OG \cdot OF = OA \cdot OD.$$

Mivel $OG + OF = 2R$, ezért a fenti egyenlőség bal oldala éppen

$$(R + OK)(R - OK) = R^2 - OK^2,$$

így

$$R^2 - OK^2 = OA \cdot OD.$$

Fejezzük ki az OA, OD szakaszok hosszúságát r és R segítségével! Az előbbire nyilván

$$OA = \frac{r}{\sin \dfrac{\alpha}{2}}.$$

Az AOB háromszög O csúcsánál levő külső szög :

$$DOB\sphericalangle = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2};$$

mivel a kerületi szögek tétele szerint

$$DBO\sphericalangle = DBC\sphericalangle + CBO\sphericalangle = DAC\sphericalangle + CBO\sphericalangle = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2},$$

ezért ODB egyenlő szárú háromszög, így

$$OD = BD.$$

Az ugyancsak egyenlő szárú BKD háromszögből végül

$$OD = BD = 2R \cdot \sin \frac{\alpha}{2},$$

tehát

$$R^2 - OK^2 = OA \cdot OD = \frac{r}{\sin \dfrac{\alpha}{2}} \cdot 2R \sin \frac{\alpha}{2} = 2rR.$$

Fejezzük ki ebből OK^2-et:

$$OK^2 = R^2 - 2rR = R(R - 2r).$$

Mivel OK^2 nem lehet negatív, eredményünk azt mutatja, hogy

(1) $$R \geqq 2r.$$

Ezzel eljutottunk a címben szereplő egyenlőtlenséghez. Célunk a továbbiakban az, hogy bemutassunk néhány olyan a háromszög oldalaira, szögeire, valamint r-re és R-re vonatkozó egyszerű egyenlőtlenséget, amelyeknek közös vonása, hogy – valamilyen formában – az (1) becslést élesítik.

Ilyen összefüggéshez jutunk például úgy, hogy a $\dfrac{2r}{R}$ hányadost becsüljük, miután azt a háromszög oldalainak, illetve szögeinek segítségével írtuk fel. Jelöljük a szokásos módon s-sel a háromszög félkerületét. Ha az ABC-be írt kör az AB oldalt C_1-ben érinti, akkor – mint ismeretes –

$$AC_1 = s - a,$$

így az AC_1O derékszögű háromszögből

$$r = (s-a)\ \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

R értékét CKB egyenlő szárú háromszögből határozhatjuk meg:

$$R = \frac{a}{2\sin\alpha},$$

ezért

$$\frac{r}{4R} = \frac{s-a}{2a}\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\alpha = \frac{\mathrm{s-a}}{\mathrm{2a}}\frac{\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\mathrm{s-a}}{\mathrm{a}}\sin^2\frac{\alpha}{2} =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{b+c-a}{a}\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

A szinusztétel segítségével a, b, c kiküszöbölhető:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{b+c-a}{a}\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\beta+\sin\gamma-\sin\alpha}{\sin\alpha}\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2} =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2\sin\dfrac{\beta+\gamma}{2}\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2} - 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}\cdot\sin\frac{\alpha}{2} =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos\dfrac{\alpha}{2}\ \cos\dfrac{\beta-\gamma}{2} - \sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}\cdot\sin\frac{\alpha}{2} =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\cos\frac{\beta-\gamma}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Legyen $y = \sin\dfrac{\alpha}{2}$, ekkor tehát

$$\frac{r}{4R} = -\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}y;$$

ez azt jelenti, hogy y (valós) gyöke az

$$x^2 - \cos\frac{\beta-\gamma}{2}x + \frac{r}{2R} = 0$$

egyenletnek, következésképpen az egyenlet diszkriminánsa nem lehet negatív:

$$0 \leqq \cos^2\frac{\beta-\gamma}{2} - \frac{2r}{R},$$

azaz

$$\frac{2r}{R} \leqq \cos^2\frac{\beta-\gamma}{2}.$$

Ugyanilyen összefüggés az ABC bármely másik két szögére is nyilván teljesül; ezzel azt kapjuk, hogy

(2) $$\frac{2r}{R} \leqq \min\left\{\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2},\ \cos^2\frac{\beta-\gamma}{2},\ \cos^2\frac{\gamma-\alpha}{2}\right\} \leqq 1.$$

Próbálkozzunk meg ezután olyan becsléssel, amiben (a szögek helyett) csupán a háromszög oldalai szerepelnek! Legyen először $S = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$. S becslése érdekében az összeget szorzattá alakítjuk :

$$\begin{aligned} S &= \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\gamma = \\ &= 2\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\gamma \leqq 2\cos\frac{\gamma}{2} + \sin\gamma = \\ &= 2\cos\frac{\gamma}{2}\left(1+\sin\frac{\gamma}{2}\right); \end{aligned}$$

a kapott egyenlőtlenség egyik oldala sem negatív, így négyzetre emelhetünk, amiből

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}S^2 &\leqq 3\cos^2\frac{\gamma}{2}\left(1+\sin\frac{\gamma}{2}\right)^2 = 3\left(1-\sin^2\frac{\gamma}{2}\right)\left(1+\sin\frac{\gamma}{2}\right)^2 = \\ &= \left(3-3\sin\frac{\gamma}{2}\right)\left(1+\sin\frac{\gamma}{2}\right)\left(1+\sin\frac{\gamma}{2}\right)\left(1+\sin\frac{\gamma}{2}\right). \end{aligned}$$

Az utoljára kapott szorzatra alkalmazhatjuk a számtani és mértani közepekre érvényes egyenlőtlenséget, következésképpen

$$\frac{3}{4}S^2 \leqq \left(\frac{\left(3-3\sin\frac{\gamma}{2}\right)+\left(1+\sin\frac{\gamma}{2}\right)+\left(1+\sin\frac{\gamma}{2}\right)+\left(1+\sin\frac{\gamma}{2}\right)}{4}\right)^4 = \left(\frac{3}{2}\right)^4,$$

így

$$S \leqq \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

azaz

$$S = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leqq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

A szinusztétel szerint azonban

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} = \frac{1}{2R},$$

ezért

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} \geqq S = \frac{1}{2R}(a+b+c),$$

vagyis

(2a)
$$\frac{a+b+c}{3\sqrt{3}} \leqq R.$$

Jelöljük az ABC háromszög a, b, c oldalaihoz (kívülről) hozzáirt körök sugarát rendre r_a, r_b, r_c-vel. Ezek harmonikus és mértani közepeire :

$$\frac{3}{\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}} \leqq \sqrt[3]{r_a r_b r_c}.$$

Ismeretes, hogy (ABC területét t-vel jelölve)

$$r_a = \frac{2t}{b+c-a},\ r_b = \frac{2t}{a-b+c},\ r_c = \frac{2t}{a+b-c},$$

így

$$\frac{6t}{a+b+c} \leqq \sqrt[3]{\frac{t^3}{(s-a)(s-b)(s-c)}} = t\sqrt[3]{\frac{s}{t^2}},$$

tehát

$$\frac{3}{s} \leqq \sqrt[3]{\frac{s}{t^2}}.$$

Köbreemelés, rendezés, majd négyzetgyökvonás után azt kapjuk, hogy

$$3\sqrt{3}t \leqq s^2,$$

ebből pedig $rs = t$ figyelembevételével:

(2b)
$$2r \leqq \frac{a+b+c}{3\sqrt{3}}.$$

Két utóbbi eredményünket összefoglalva tehát:

$$2r \leqq \frac{a+b+c}{3\sqrt{3}} \leqq R. \tag{3}$$

Utoljára egy olyan összefüggést bizonyítunk, amelyben az ABC háromszög oldalai és szögei egyaránt előfordulnak (persze továbbra is szimmetrikus szereposztásban). Korábban már láttuk, hogy

$$\frac{r}{4R} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\beta-\gamma}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\beta-\gamma}{2} - \cos\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2} =$$
$$= \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2},$$

továbbá

$$r = (s-a)\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2},$$

azaz

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{r}\,(s-a)\sin\frac{\alpha}{2};$$

ezért

$$abc\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = abc\frac{1}{r^3}(s-a)(s-b)(s-c)\cdot\frac{r}{4R} =$$
$$= 4Rt\frac{1}{r^3}\cdot\frac{t^2}{s}\cdot\frac{r}{4R} = \frac{t^3}{r^2 s} = rs^2.$$

A számtani és mértani középre fennálló egyenlőtlenség szerint így

$$a\cos\frac{\alpha}{2} + b\cos\frac{\beta}{2} + c\cos\frac{\gamma}{2} \geqq 3\sqrt[3]{rs^2}.$$

Alkalmazzuk most a (2b) becslést :

$$3\sqrt[3]{rs^2} = \ 3\sqrt[3]{r\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2} \ \geqq\ 3\sqrt[3]{r\cdot 27r^2} = 9r, \text{ tehát}$$

$$r \leqq \frac{1}{9}\left(a\cos\frac{\alpha}{2} + b\cos\frac{\beta}{2} + c\cos\frac{\gamma}{2}\right). \tag{3a}$$

Most az egyenlőtlenség jobb oldalán álló mennyiséget becsüljük felülről. Az AC_1O derékszögű háromszögből

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{AC_1}{AO} = \frac{s-a}{\sqrt{r^2+(s-a)^2}};$$

mivel pedig

$$r^2+(s-a)^2 = \frac{t^2}{s^2} + (s-a)^2 = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s} + (s-a)^2 =$$
$$= \frac{s-a}{s}\big((s-b)(s-c)+s(s-a)\big) = \frac{(s-a)bc}{s},$$

ezért

$$a\cdot\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{s}\cdot\frac{a\sqrt{s-a}}{\sqrt{bc}} = \sqrt{s}\cdot\sqrt{\frac{a^3(s-a)}{abc}}$$

A számtani és négyzetes közép között fennálló egyenlőtlenség szerint így

$$a\cos\frac{\alpha}{2} + b\cos\frac{\beta}{2} + c\cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{s}\left(\sqrt{\frac{a^3(s-a)}{abc}} + \sqrt{\frac{b^3(s-b)}{abc}} + \sqrt{\frac{c^3(s-c)}{abc}}\right) \leqq \tag{3b}$$
$$\leqq \sqrt{3s}\sqrt{\frac{a^3(s-a)+b^3(s-b)+c^3(s-c)}{abc}}.$$

Legyen

$$P = \frac{a^3(s-a)+b^3(s-b)+c^3(s-c)}{abc};$$

megmutatjuk, hogy

$$\sqrt{s}\cdot\sqrt{P} \leqq \frac{1}{2}(s+P). \tag{3c}$$

Valóban, (3c) mindkét oldala nemnegatív, és ezek négyzeteire:

$$sP \leqq \frac{1}{4}(s^2+2sP+P^2),$$

hiszen rendezés után ez éppen

$$4sP \leqq s^2+2sP+P^2,$$

azaz

$$0 \leqq s^2-2sP+P^2 = (s-P)^2,$$

ami természetesen igaz. (3b) és (3c) szerint tehát

$$a\cos\frac{\alpha}{2}+b\cos\frac{\beta}{2}+c\cos\frac{\gamma}{2} \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}\left(s+\frac{a^3(s-a)+b^3(s-b)+c^3(s-c)}{abc}\right). \tag{3d}$$

Ezután azt látjuk be, hogy

$$\frac{a^3(s-a)+b^3(s-b)+c^3(s-c)}{abc} \leqq s.$$

Rendezéssel:

$$a^3(b+c-a)+b^3(a+c-b)+c^3(a+b-c) \leqq abc(a+b+c),$$

azaz

$$0 \leqq a^2(b-a)(c-a)+b^2(a-b)(c-b)+c^2(a-c)(b-c).$$

Legyen például $a \leqq b \leqq c$; az utóbbi egyenlőtlenség jobb oldala ekkor a következőképpen becsülhető :

$$\begin{gathered}
a^2(b-a)(c-a)+b^2(a-b)(c-b)+c^2(a-c)(b-c) = \\
= a\cdot a(b-a)(c-a)-b^2(b-a)(c-b)+c^2(c-a)(c-b) \geqq \\
\geqq a(c-b)(b-a)(c-a)-b^2(c-a)(c-b)+c^2(c-a)(c-b) = \\
= (c-a)(c-b)\big(a(b-a)-b^2+c^2\big) \geqq (c-a)(c-b)\big(a(b-a)\big) \geqq 0,
\end{gathered}$$

így (3e) is teljesül. (3d) és (3e) alapján tehát

$$a\cos\frac{\alpha}{2}+b\cos\frac{\beta}{2}+c\cos\frac{\gamma}{2} \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c).$$

A jobb oldalra most alkalmazható (2a), ebből pedig – (3a)-val kiegészítve – azt kapjuk, hogy

$$r = \frac{1}{9}\left(a\cos\frac{\alpha}{2}+b\cos\frac{\beta}{2}+c\cos\frac{\gamma}{2}\right) \leqq \frac{1}{2}R. \tag{4}$$