

1. a, b, c, d különböző pozitív egész számok, amelyekre teljesül az

$$a + b = cd$$

és az

$$ab = c + d$$

egyenlőség. Határozzuk meg az összes ilyen számnegyest.

I. megoldás. Mivel a négy szám szerepe semmiben sincs kitüntetve egymáshoz képest, feltehetjük az általánosság megszorítása nélkül, hogy a a legkisebb, továbbá, hogy $c < d$, tehát

$$a < b, \quad a < c < d.$$

Nem lehet $a \geq 2$, mert akkor $c \geq 3$, és így

$$ab \geq 2b > a + b = cd \geq 3d > c + 2d = ab + d > ab$$

kellene, hogy fennálljon, de ez lehetetlen. Eszerint

$$a = 1, \quad c \geq 2 \quad \text{és} \quad d \geq c + 1,$$

tehát

$$a + b = 1 + b = cd \geq 2d \geq c + 1 + d = ab + 1 = b + 1.$$

Ez csak úgy állhat fenn, ha mindenütt az egyenlőség jele érvényes, tehát

$$c = 2, \quad d = c + 1 = 3 \quad \text{és} \quad b = cd - 1 = 5.$$

Az 1, 5 és 2, 3 számpár valóban megfelel a feltételeknek. Ezekből további 7 megfelelő számpárt kapunk, ha a párok elemeit egymás közt felcseréljük, továbbá ha a két párt megcseréljük.

II. megoldás. Alakítsuk át a feltételi egyenlőségek felhasználásával az $(a - 1)(b - 1)$ szorzatot:

$$(a - 1)(b - 1) = ab - a - b + 1 = c + d - cd + 1 = 2 - (c - 1)(d - 1),$$

azaz

$$(a - 1)(b - 1) + (c - 1)(d - 1) = 2.$$

Miután a feladat pozitív egész számokról szól, ez csak úgy állhat fenn, ha a bal oldalon vagy mindkét tag 1, vagy az egyik 0, a másik 2. Az első lehetőség egyedül az $a = b = c = d = 2$ esetben következik be. Ezekre teljesülnek a feladatban megkívánt egyenlőségek, de a számok nem különbözők.

A második eset akkor következik be, ha az egyik szám 1, mondjuk $a = 1$, amiből következik, hogy

$$(c - 1)(d - 1) = 2.$$

Feltehetjük, hogy $c < d$. Ekkor $c - 1 = 1$, $d - 1 = 2$ kell, hogy legyen, azaz $c = 2$, $d = 3$ és $b = 1 \cdot b = c + d = 5$. Ezek az értékek kielégítik a feladat összes követelményét.

III. megoldás. A feltételi egyenlőségekből következik, hogy

$$1 = \frac{a+b}{cd} \cdot \frac{c+d}{ab} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right).$$

A jobb oldalon vagy mind a két tényező 1, vagy az egyik – mondjuk az első – nagyobb, a másik kisebb, mint 1. Az első feltétel csak úgy teljesülhet, ha mindegyik tört értéke $\frac{1}{2}$, tehát $a = b = c = d = 2$, de ezek nem különbözők.

A második esetben, tehát ha

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > 1,$$

nem lehet $a > 1$, mert akkor $b > 2$, s így

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} < 1.$$

Eszerint $a = 1$, s így $b \geq 2$, amiből következik, hogy

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad \text{tehát} \quad \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \geq \frac{2}{3}.$$

Nem lehet $c > 2$, mert akkor $d > 3$, s így

$$\frac{1}{c} + \frac{1}{d} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{4} < \frac{2}{3}.$$

Eszerint $c = 2$, és a feltételi egyenletek így alakulnak:

$$b = 1 \cdot b = 2 + d, \quad 1 + b = 2d = 2b - 4,$$

tehát $b = 5, d = 3$. Az 1, 5; 2, 3 számpárok megfelelnek a feltételeknek.

Megjegyzés. Miután megállapítottuk, hogy $a = 1$, érdekes befejezés a következő: az

$$1 + b = cd, \quad b = c + d$$

egyenlőségekből a másodikat c -vel szorozva és az elsőt felhasználva

$$bc = c^2 + 1 + b.$$

Az egyenlőséget 4-gyel szorozva így alakítjuk át:

$$4c^2 - 4bc + b^2 + 8 = b^2 - 4b + 4, \quad \text{azaz} \quad (2c - b)^2 + 8 = (b - 2)^2.$$

A négyzetszámok közül csak az 1 és a 9 különbsége 8, tehát $|2c - b| = 1$, $|b - 2| = 3$, és innen ismét megkapjuk az előbbi két számpárt.

IV. megoldás. A feltételi egyenletekből következik, hogy

$$\frac{ab}{a+b} = \frac{c+d}{cd}.$$

Mind a két tört pozitív, s így vagy $\frac{ab}{a+b}$ is, $\frac{c+d}{cd}$ is 1, vagy az egyik, mondjuk az első, kisebb 1-nél, a második nagyobb nála. Az első esetben $ab = a + b$, amiből $(a - 1)(b - 1) = 1$, s így – pozitív egész számokról lévén szó – $a = b = 2$. Ezek azonban nem különböznek.

A második esetben $ab < a + b$, és mivel egész számokról van szó,

$$ab \leq a + b - 1, \quad \text{azaz} \quad (a - 1)(b - 1) \leq 0.$$

A bal oldal nem lehet negatív, tehát 0 az értéke, vagyis az egyik szám, mondjuk $a = 1$.

Ekkor

$$cd = 1 + b = 1 + 1 \cdot b = 1 + c + d,$$

amiből c -t kifejezve

$$c = \frac{d+1}{d-1} = 1 + \frac{2}{d-1}.$$

Mivel c egész, így d csak 2 vagy 3 lehet, c megfelelő értékei pedig 3 ill. 2. Ezzel ismét az 1, 5 és 2, 3 számpárokhoz jutottunk.

2. Van-e a térben olyan ponthalmaz, amelynek minden síkon van pontja, de egyetlen síkon sincs végtelen sok pontja?

I. megoldás: Van ilyen ponthalmaz és nagyon sokféleképpen lehet ilyent megadni. Egy derékszögű koordináta-rendszerben a pont koordinátáit x, y, z -vel jelölve minden sík egyenlete írható

$$ax + by + cz + d = 0$$

alakban, ahol a, b, c közt van 0-tól különböző. A ponthalmazt úgy adjuk meg, hogy minden valós t értékhez hozzárendeljük azt a pontot, amelyiknek koordinátái

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t).$$

Az f, g, h függvényeket úgy kell választanunk, hogy az

$$af(t) + bg(t) + ch(t) + d = 0$$

egyenletnek legyen legalább egy gyöke, ha a, b, c közül legalább az egyik nem 0, de mindig csak véges sok gyöke legyen.

Kézenfekvő polinomokat választani, mert tudjuk, hogy egy polinomnak csak véges sok gyöke lehet: legfeljebb annyi, mint a foka, kivéve természetesen a 0 polinomot. Azt is tudjuk továbbá, hogy (valós együtthatós) páratlan fokú polinomnak mindig van legalább egy (valós) gyöke. Ezek alapján az $x = t^5, y = t^3, z = t$ összefüggésekkel jellemzett ponthalmaz megfelel. Ezt írhatjuk kicsit egyszerűbben

$$x = z^5, \quad y = z^3$$

alakban is. Valóban, az

$$az^5 + bz^3 + cz + d = 0$$

egyenlet a mondott feltételek mellett mindig páratlan: 5-öd-, 3-ad- vagy elsőfokú, így a ponthalmaznak minden síkkal legalább egy és legfeljebb 5 közös pontja van.

Megjegyzések. 1. Mint a megoldás is utal rá, f , g , h -nak bármilyen három különböző, páratlan fokú polinomot választhatunk. Használhatunk páros fokú polinomot is alkalmas előjel-megállapodásokkal kombinálva. Könnyű látni pl., hogy a következő ponthalmaznak:

$$z = x^3, \quad y = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \geq 0, \\ -x^2 & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

szintén van pontja minden síkon és mindegyiken csak véges számú. Belátható, hogy ennek is legfeljebb 5 pontja lehet egy síkon. Ennek igazolását az olvasóra bizzuk.

2. A megadott ponthalmazok pontjai térbeli görbét alkotnak. Az előző megjegyzésben szereplő görbéhez eljuthatunk úgy, hogy az x - és z -tengely síkjában megrajzoljuk a $z = x^3$ egyenletű görbét, és tekintjük az ennek a pontjain át az y tengellyel párhuzamosan húzott egyenesek alkotta (általános) hengerfelületet; az y - és x -tengely síkjában pedig az origóban érintkező, első, ill. harmadik negyedben futó két félpárolaívból álló görbe pontjain át a z -tengellyel párhuzamosan húzott egyenesek alkotta hengerfelületet képezzük. A két felület metszésvonala adja a szóban forgó görbét (1. a, b, c ábra).

1988-02-053-1.eps

1.a ábra

1988-02-053-2.eps

1.b ábra

1988-02-054-1.eps

1.c ábra

3. Használhatók polinomok helyett más függvények is. Erre mutat példát a következő megoldás.

II. megoldás. Három térbeli görbe vonalat adunk meg, amelyek egyesítésére teljesülnek a követelmények. Ezek szemléletesen így származtathatók. Egy 2π szélességű végtelen sáv középvonala legyen az ordinátatengely. Ábrázoljuk a $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ függvényt a $-\pi < \varphi < \pi$ számközben (2.a ábra), majd hajlítsuk össze a sávot egy (egységnyi sugarú) hengerré. A henger három példányát helyezzük el úgy, hogy a tengelyük rendre az x -, y -, z -tengely legyen, a sáv $(0, 0)$ pontja pedig az y -, z -, illetve x -tengely egységpontjába kerüljön. (A 2.b ábra a harmadik hengert ábrázolja.)

1988-02-054-2.eps

2.a ábra

1988-02-054-3.eps

2.b ábra

A feltételek teljesülésének igazolásához célszerű a pontok koordinátáit formulákkal megadni. A z -tengely körüli henger egy pontja legyen P , vetülete az x , y koordinátasíkon P' , az ehhez mutató vektornak az x -tengely pozitív felével bezárt szöge φ . Ekkor az $(1, 0, 0)$ ponttól P' -ig terjedő körív hossza is φ , így a P pont koordinátái:

$$x = \cos \varphi, \quad y = \sin \varphi, \quad z = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}.$$

A másik két görbe pontjainak koordinátái:

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}, & y &= \cos \varphi, & z &= \sin \varphi, & \text{ill.} \\ x &= \sin \varphi, & y &= \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}, & z &= \cos \varphi; \end{aligned}$$

φ mindhárom esetben $-\pi$ és π közti szöget jelent (radiánban mérve).

Egy tetszés szerinti sík egyenlete

$$(1) \quad ax + by + cz + d = 0$$

alakú, ahol a, b, c közt van 0-tól különböző. Ennek a harmadik görbével való metszéspontjai azok a pontok, amelyek koordinátái az

$$a \cos \varphi + b \sin \varphi + c \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + d = 0$$

egyenletnek eleget tévő φ értékekhez az első egyenlethármassal meghatározott értékek.

Az egyenlet $t = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ -re vonatkozó algebrai egyenletté alakítható a következő összefüggések felhasználásával:

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2} + \cos^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{2t}{t^2 + 1}; \\ \cos \varphi &= \frac{\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2} + \cos^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}. \end{aligned}$$

Ezeket beírva, a törtet eltávolítva és az egyenletet rendezve kapjuk, hogy:

$$(2) \quad ct^3 + (d - a)t^2 + 2bt + a + d = 0.$$

Ennek legfeljebb 3 megoldása van (a valós számok körében), kivéve, ha az azonosan 0 polinomról van szó, vagyis ha

$$b = c = d - a = a + d = 0.$$

Ekkor azonban a és d is 0, s így az (1) egyenlet minden (x, y, z) számhármásra teljesül, nem sík egyenlete. Mivel $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ a $-\pi < \varphi < \pi$ számközben minden valós értéket felvesz, és mindegyiket csak egyszer, így a síknak a görbével legfeljebb 3 közös pontja lehet.

Ugyanígy adódik, hogy egy síknak a másik két görbével is legfeljebb 3-3 közös pontja lehet, az egész ponthalmazzal tehát legfeljebb 9.

Az is világos, hogy minden síknak van közös pontja a halmazzal, mert ha pl. $c \neq 0$, akkor a (2) egyenlet harmadfokú és így van valós gyöke.

Megjegyzések. 1. Szemléletesen a hengert elmetsettük egy síkkal, és azt kérdezzük, hogy ha a hengerfelületet egy alkotója mentén felvágjuk és a síkba terítjük, a metszésvonal hány pontban metszi a tangensgörbe képét. Belátjuk, hogy ha a sík metszi a henger tengelyét, de nem merőleges rá, akkor a metszésvonal a síkba terítve egy szinuszvonalat ad.

Valóban, a henger egy tetszés szerinti pontjának koordinátái $x = \cos \varphi$, $y = \sin \varphi$, z alakban írhatók, így az (1) síkkal való metszéspontokat azok a φ értékek szolgáltatják, amelyekre

$$a \cos \varphi + b \sin \varphi + cz + d = 0.$$

A síkra kimondott feltételek akkor teljesülnek, ha c , továbbá a és b közül legalább az egyik nem 0. Ekkor egyenletünk így alakítható át:

$$z = -\frac{a}{c} \cos \varphi - \frac{b}{c} \sin \varphi - \frac{d}{c} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{c} \sin(\varphi - \alpha) - \frac{d}{c},$$

ahol α -t a

$$\sin \alpha = \frac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

összefüggések határozzák meg. Ezzel a kimondott állítást igazoltuk. A fenti megfontolás azt a szemléleti megfigyelést igazolja, hogy a két vonalnak legfeljebb 3 metszéspontja lehet.

2. Megfelelő ponthalmazok számtalan más elgondolás alapján is elkészíthetők, és merült is fel sok további példa a dolgozatokban. Többen állították azonban azt is, egyesek indokolni is próbálták, hogy a kívánt tulajdonságú ponthalmaz nem létezik.

3. A felmerült példák mindegyikében volt olyan sík, amelyik a ponthalmaznak legalább 5 pontját tartalmazta. Kézenfekvő kérdés, hogy nem adható-e meg olyan ponthalmaz, amelyiknek minden síkon 5-nél kevesebb pontja van. Nem csökkenthető ez a szám 3 alá, hiszen a halmaz bármely 3 pontján át fektethető sík. Mély halmazelméleti módszerekkel

bebizonyítható, hogy létezik olyan ponthalmaz is, amelyiknek minden síkon pontosan 3 pontja van. Ez a bizonyítás azonban csupán a ponthalmaz létezését adja, előállításához vagy egyáltalán az elképzeléséhez sem ad semmilyen támpontot.

Megmutatható, hogy egy folytonos vonalnak, ha kielégíti a feltételeket, mindig van 5 egy síkban lévő pontja.

3. Egy $3n + 1$ tagú társaság bármely két tagja vagy teniszezni, vagy sakkozni, vagy pingpongozni szokott egymással. Mindegyiküknek n tenisz-, n sakk- és n pingpongpartnere van.

Bizonyítsuk be, hogy van a társaságban három olyan ember, akik egymás között mind a három játékot játsszák.

I. megoldás. Mindenki mindenkivel csak egyféle játékot játszik, hiszen mindenkinek $3n$ partnere van és összesen ennyi játszmaiban vesz részt.

Három embert összesen

$$\binom{3n+1}{3}$$

-féleképpen lehet kiválasztani a társaságból. Számoljuk össze, hány olyan hármas lehet maximálisan, amelyiknek a tagjai legfeljebb kétféle játékot játszanak egymás közt! A társaság egy A tagja n emberrel pingpongozik, így $\binom{n}{2}$ olyan hármasban van benne, amelyiknek mind a két másik tagjával pingpongozik. Ugyanennyi olyan hármasban van benne, amelyikben mindkét partnerrel sakkozik, illetőleg amelyikben mindkettővel teniszeznek, tehát $3 \cdot \binom{n}{2}$ olyan hármas van, amelyikben ő csak egyféle játékot játszik. Ez igaz a társaság bármelyik tagjára, tehát az olyan hármasok száma, amelyeknek tagjai legfeljebb kétféle játékot játszanak egymás közt, nem több, mint

$$3 \binom{n}{2} (3n+1),$$

az olyan hármasokat ugyanis, ha vannak, amelyeken belül csak egyféle játékot játszanak, többször vettük számba. Az olyan hármasok száma tehát, amelyeken belül mind a három játékot játsszák, legalább

$$\binom{3n+1}{3} - 3 \binom{n}{2} (3n+1) = \frac{(3n+1)3n(3n-1)}{6} - 3 \frac{n(n-1)}{2} \cdot (3n+1) = 3n^2 + n.$$

A feladat állítása tehát igaz.

Megjegyzés. A bizonyítás alsó korlátot is adott a feladat követelményeit kielégítő hármasok számára, nem adott viszont eljárást ilyen hármasok kiválasztására, csak létezésüket bizonyítja.

II. megoldás. A feladat állításának helyességét indirekt úton bizonyítjuk. Legyen A a társaság egy tagja, $\mathcal{P}$ azoknak a csoportja, akik A -val pingpongoznak, $\mathcal{S}$ azoké, akik sakkoznak vele és $\mathcal{T}$ az A -val teniszezők. Tegyük fel, hogy nincs a feladat állításának megfelelő hármas. Ekkor egy $\mathcal{P}$ -beli és egy $\mathcal{S}$ -beli nem teniszezhet, egy $\mathcal{S}$ -beli és egy $\mathcal{T}$ -beli nem pingpongozhat, egy $\mathcal{T}$ -és egy $\mathcal{P}$ -beli pedig nem sakkozhat, mert különben A -val megfelelő hármas alakulna.

Megszámoljuk kétféleképpen azoknak a hármasoknak a számát, amelyekben mindegyik csoportnak egy tagja szerepel. Mindegyik csoportból n -féleképpen választhatunk egy embert, tehát a lehetséges hármasok száma n^3 . Mivel egyik hármas tagjai sem játsszák mind a három játékot egymás közt, így valaki mindkét partnerével ugyanazt a játékot játssza. Egy ilyen hármas $\mathcal{P}$ -beli tagja mindkét partnerével csak pingpongot játszhat fenti megállapításaink szerint. Ha $\mathcal{S}$ -ből j emberrel pingpongozik, $\mathcal{T}$ -ből pedig k -val, akkor jk olyan hármasnak tagja, amelyiken belül két pingpongozó pár van. Egyrészt tudjuk, hogy összesen n pingpongpartnere van, így¹ $j + k \leq n$, másrészt a mértani és számtani közép közti egyenlőtlenség szerint

$$jk \leq \left(\frac{j+k}{2} \right)^2 \leq \left(\frac{n}{2} \right)^2.$$

Mivel a $\mathcal{P}$ csoportnak n tagja van, tehát legfeljebb $n^3/4$ olyan hármas van, amelyikben két pingpongozó pár szerepel. Ugyanez igaz az olyan hármasok számára is, amelyekben két sakkozó, ill. amelyekben két teniszező pár szerepel. Ez azonban összesen is csak $3n^3/4$ hármas ad, kevesebbet, mint az összes tekintetbe vett hármasok száma. Indirekt feltevésünk tehát helytelennek bizonyult, kell olyan hármasnak lennie, amelyiknek tagjai mindegyik játékot játsszák egymás közt.

III. megoldás. Tekintsük ismét a társaságnak az előző megoldásban szereplő felbontását csoportokra. Becsüljük meg felülről azoknak a hármasoknak a számát, amelyekben szerepel A , és amelyek nem felelnek meg a feladat állításában szereplő feltételnek. Csak olyan hármasok jönnek tekintetbe, amelyekben A -n kívül két különböző csoportbeli ember szerepel. Az ilyen hármasok száma $3n^2$. Azt is láttuk az előző megoldásban, hogy egy ilyen hármas akkor nem megfelelő, ha benne egy pingpongozó pár egyike $\mathcal{P}$ -ből való, vagy egy sakkiparti egyik résztvevője $\mathcal{S}$ -ből, vagy egy teniszező pár egyike $\mathcal{T}$ -ből való. Egy $\mathcal{P}$ -beli P személy $\mathcal{S}$ -ből és $\mathcal{T}$ -ből együtt legfeljebb $n-1$ emberrel pingpongozik, mert

¹Valójában $j + k \leq n-1$ is fennáll, mert az illető egyik pingpongpartnere A .

egyik pingpongpárnere A . A tekintetbe vett hármasok közül azok száma, amelyekben a $\mathcal{P}$ -beli n ember valamelyike pingpongozik a harmadik társsal, legfeljebb $n(n-1)$. Ugyanez mondható az olyan hármasok számáról, amelyekben egy $\mathcal{S}$ -beli egyén sakkozik a harmadikkal és azokéről, amelyekben olyan $\mathcal{T}$ -beli szerepel, aki teniszezik a harmadikkal. A $3n^2$ számba vett hármas közül tehát legfeljebb $3n^2 - 3n$ az, amelyikre nem teljesül a feladat állítása; legalább $3n$ hármasra tehát teljesül.

Megjegyzések. 1. Ha a megfontolást a társaság mind a $3n+1$ tagjára megismételjük, akkor minden számba jövő hármas háromszor veszünk tekintetbe. Ennek alapján a társaságból kiválasztható összes olyan hármasok száma, amelyekben mind a három játékot játsszák egymás közt, legalább $n(3n+1)$. Ugyanazt a becslést nyertük, mint az első megoldásban. Szoros rokonságban is van a két megoldás, amennyiben az utóbbiban is olyan hármasok számának becslése útján jutottunk célhoz, amelyekben csak kétféle játékot játszanak.

A fenti megoldásban azokat a hármasokat vettük számba, amelyekben szerepel A , de a két társával ugyanazt a játékot játszó személy $\mathcal{P}$ -ben, $\mathcal{S}$ -ben, vagy $\mathcal{T}$ -ben van.

2. A nyert korlát $n = 1, 2, 3, 4$ esetén pontos. Ezt az első három esetben leolvashatjuk a 3. ábráról, amelyen a pontok a társaság tagjait képviselik, a folytonos vonallal összekötötték a pingpongozó párokat jelölik, a szaggatott vonalak a sakkipartikat, a pontozott összekötések pedig a teniszezőket.

1988-02-058-1.eps

3.a ábra

1988-02-058-2.eps

3.b ábra

1988-02-058-3.eps

3.c ábra

Az $n = 4$ esetben a 13 embert körbe állítva mindenki a két szomszédjával és a harmadik szomszédjaival pingpongozik, a második és az ötödik szomszédjaival sakkozik, a negyedik és a hatodik szomszédjaival pedig teniszezik. Az ezt feltüntető ábrát bonyolultsága miatt jobb, ha az olvasó magának nagyban és esetleg színes vonalakkal rajzolja meg.

Nagyobb n -ekre már mindig nagyobb a megfelelő hármasok száma az itt nyert értéknél.²

IV. megoldás. Eljárást adunk egy kívánt tulajdonságú hármas megkeresésére. Ismét a társaság előző megoldásokban szereplő csoportosításából indulunk ki. A $\mathcal{P}$ csoport egy P_1 tagja sakkozik másik csoportbeli emberrel, mert $\mathcal{P}$ -ben rajta kívül $n-1$ ember van, tehát ennél több sakkipárnere sem lehet. Ha van sakkipárnere $\mathcal{T}$ -ben, akkor azzal és A -val a feladat követelményének megfelelő hármas alkotnak. Ha nincs, akkor egy $\mathcal{S}$ -beli S_1 sakkipárnert véve, annak van teniszpárnere $\mathcal{S}$ -en kívül. Ha teniszezik $\mathcal{P}$ -beli társsal, akkor ismét megfelelő hármas alkotnak A -val. Ha nem, akkor egy $\mathcal{T}$ -beli T_1 teniszpárnerről ismét feltehetjük, hogy $\mathcal{T}$ -n kívüli pingpongpárnerei $\mathcal{P}$ -ben vannak. Egyet kiválasztva az eljárást folytathatjuk, míg el nem jutunk vagy egy olyan párhoz, akik A -val együtt megfelelő hármas alkotnak, vagy olyan valakihez, aki már korábban is szerepelt. Utóbbi esetben egy kört kapunk, amelyikben egy-egy $\mathcal{P}$ -, $\mathcal{S}$ -, $\mathcal{T}$ -beli személy követi egymást periodikusan, és mindenki olyan játékot játszik a rákövetkezővel, amilyent az utóbbi A -val játszik. Ha ez a kör három emberből áll, akkor ők megfelelő hármas alkotnak.

Megmutatjuk, hogy ha a kör ennél hosszabb, akkor kihagyható belőle három egymás utáni ember úgy, hogy a kör leírt szerkezete megmaradjon, vagy találunk egy megfelelő hármas. Legyen S, T, P', S', T' a kör öt egymás utáni tagja. Ha P' és T' sakkozik, akkor A -val, ha pedig pingpongozik, akkor S' -vel alkotnak megfelelő hármas. Az az eset vizsgálendő tovább, ha teniszeznek. Ha P' és S teniszeznek, akkor A -val, ha sakkoznak, akkor T -vel alkotnak megfelelő hármas; marad az az eset, ha pingpongoznak. Nézzük ekkor S -et és T' -t. Ha pingpongoznak, akkor A -val, ha sakkoznak, akkor a vizsgált esetben P' -vel alkotnak megfelelő hármas. Ha viszont S és T' teniszeznek, akkor T, P' és S' kihagyása után is megmarad a kör fentebb leírt szerkezete. Így az eljárás véges számú ismétlésével eljutunk a feladat állításának megfelelő hármashoz.

Megjegyzések. 1. A társaság tagjait pontokkal, a köztük zajló különböző játékokat különböző fajta vonalakkal ábrázolva, ahogyan azt a 3. ábrán is tettük, gráf keletkezik. A vonalakat – a gráf éleit – megkülönböztethetjük különböző színek használatával. Az olyan gráfot, amelyikben minden pontot mindegyik másikkal összeköt egy él, teljes gráfnak nevezik. Gráfok nyelvén fogalmazva és csekély általánosítással a következő tételt nyerjük: Ha $m \geq 3$ és egy m szögpontú teljes gráf éleit 3 színnel színezzük úgy, hogy az egy-egy szögpontból induló különböző színű élek száma legfeljebb eggyel különbözzék, akkor van a gráfban olyan 3 pont, amelyeket különböző színű élek kötnek össze. A fenti megoldások az általánosabb esetben is célra vezetnek.

²Erre a kérdésre lapunkban visszatérünk (szerk.).

2. Láttuk, hogy az adott feltételek mellett nem csak létezik kívánt tulajdonságú hármas, de elég szép számban van. Kérdés, hogy nem lazíthatnánk-e a színeloszlás egyenletességének követelményén úgy, hogy a következmény még érvényes legyen. Nem elegendő-e például azt megkívánni, hogy bármelyik pontból induló egyszínű élek száma legalább az összes élek $0,3$ része legyen?

Annyi biztos, hogy ez az arányszám nem vihető $1/4$ alá. Ez így látható be: vegyünk 4 , egyenként n pontból álló ponthalmazt. Az egy halmazon belüli élek legyenek pirosak, azok, amelyek első és második halmazbeli pontokat vagy harmadik és negyedik halmazbelieket kötnek össze, kékek, a többi él legyen zöld. Ekkor minden pontból $n - 1$ piros él indul ki, n kék és $2n$ zöld, és könnyen látható, hogy nincs háromszínű háromszög. Felmerül a kérdés, hol van a kritikus határ $1/3$ és $1/4$ közt. Lapzártakor értesültünk, bizonyítást nyert, hogy az $1/4$ érték az.