

1. a) $x = \frac{4}{3}$; b) $x \leq -4$ vagy $0 \leq x < \frac{4}{3}$; c) $x > \frac{4}{3}$.

2. Az átlók hossza $\sqrt{\frac{44}{3}}$, illetve $\sqrt{\frac{19}{3}}$ egység.

3. Mindkét egyenlet valamire nézve másodfokú. Az egyenletrendszer megoldásai: $x_1 = 2, y_1 = 1; x_2 = -2, y_2 = -1; x_3 = \sqrt{3}, y_3 = -\sqrt{3}; x_4 = -\sqrt{3}, y_4 = \sqrt{3}$.

4. Az egyenlet D diszkriminánsa $D = -4(a^2 - 3a) \geq 0$, ha $0 \leq a \leq 3$; ekkor valósak az adott egyenlet gyökei. Most $p(a) = (x_1 - x_2)^2 = (D = -4)9 - 4 \left(a - \frac{3}{2}\right)^2$. Ez $a = \frac{3}{2}$ esetén a legnagyobb $\left(0 < \frac{3}{2} < 3\right)$, így $p(a)$ legnagyobb értéke 9.

5. Dolgozhatunk paraméter alkalmazásával vagy a megfelelő szerkesztés lépéseit számítással követve. A megoldás során alkalmazhatjuk vektorok 90° -os elforgatását, valamint összeadását.

A feltételeknek két négyzet felel meg :

$B_1(4; 6), C_1(0; 8), D_1(-2; 4)$, illetve $B_2(4; -2), C_2(0; -4), D_2(-2; 0)$.

6.

$$x_{1,n} = \frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x_{2,k} = \frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

7. Mivel $q \neq 1$ ($q = 1$ nem felel meg a feltételeknek), ezért $q = -2, n = 5$ adódik. A sorozat első n eleme:

$$3, -6, 12, -24, 48.$$

8. Ha a gúla alapéle a , magassága m , a kocka éle b , akkor $b = \frac{am}{a+m}$, így azt kell igazolni, hogy

$$\left(\frac{am}{a+m}\right)^3 \leq \frac{4}{9} \cdot \frac{a^2 m}{3}.$$

Ekvivalens átalakításokkal kapjuk, hogy

$$(a+4m)(2a-m)^2 \geq 0,$$

így igaz az állítás. Az egyenlőség $m = 2a$ ($3b = 2a$) esetén teljesül. A feladat differenciálszámítás, valamint három pozitív szám számtani és mértani közepe közötti egyenlőtlenséggel is megoldható.