(Valamennyi felvételiző számára)

1. Oldja meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán:

$$\frac{4}{x}+\frac{5}{y}=23, \quad \frac{5}{x}-\frac{4}{y}=-2.$$

(9 pont)

2. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{\lg x}+\left(\frac{4}{3}\right)^{\lg x}=\frac{25}{12}.$$

(11 pont)

3. Egy t területű kör köré olyan rombuszt rajzolunk, amelynek egyik szöge 30°-os. Fejezze ki a rombusz területét t segítségével! (12 pont)

4. Mely valós x-ekre értelmezhetők az alábbi kifejezések:

$$a) \quad \sqrt{3-\sqrt{x-2}}; \qquad b) \quad \sqrt{x-\sqrt{x-2}}; \qquad c) \quad \sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}.$$

(13 pont)

5. Az ABC háromszögben az A csúcsnál levő szög a B csúcsnál levő szögnek kétszerese, továbbá a BC oldal kétszerese egyenlő az AC oldal háromszorosával, a háromszög területének mérőszáma pedig a C csúcsnál levő szög sinusának 27-szerese. Számítsa ki a háromszög szögeit és oldalait! (13 pont)

A. *Gimnazisták számára ajánlott*

6. Írja fel annak a körnek az egyenletét, amelynek középpontja az x tengelyen van és amely az $x^2+y^2+4x+6y-87=0$ egyenletű k_1 kört belülről, az $x^2+y^2-20x-12y+111=0$ egyenletű k_2 kört pedig kívülről érinti! (13 pont)

7. Egy gúla alaplapja négyzet, oldallapjai egybevágó egyenlő szárú háromszögek. A gúla magassága 30°-os szöget zár be a gúla oldallapjaival. Írjon a gúlába kockát úgy, hogy a kocka négy csúcsa a gúla alaplapjára illeszkedjék, másik négy csúcsa pedig az oldallapokon helyezkedjék el úgy, hogy a gúla csúcsából kiinduló magasságvonalakra illeszkedjék! Számítsa ki a gúla és a kocka térfogatának arányát! (14 pont)

8. Legyenek p és q pozitív egész számok, és $q \geq p$. Bizonyítsa be, hogy

$$\frac{q+\frac{1}{2}}{p-\frac{1}{2}} > \frac{1}{p}+\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p+2}+\cdots+\frac{1}{q}.$$

(15 pont)

B. *Szakközépiskolások számára ajánlott*

6. Az $x-2=(y-1)^2$ egyenletű parabola P_1 és P_2 pontjaiból az $A(2;\,1)$ és $B(6;\,1)$ pontok által határolt szakasz derékszögben látszik. Mekkora az AP_1BP_2 négyszög területe? (13 pont)

7. Egy egyenes körhenger magassága 2, sugara 7. Ebbe a hengerbe olyan négyzetet írunk, amelynek síkja metszi a henger tengelyét. A négyzet csúcsai az alap-, illetve a fedőkör kerületén helyezkednek el. Számítsa ki a négyzet oldalát, továbbá a henger tengelyének a négyzet síkjával bezárt szögét! (14 pont)

8. Oldja meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:

$$2\sqrt{|1-2x|} \geq 1+x.$$

(15 pont)