

Az alábbiakban a háromszögek talpponti háromszögének egy tulajdonságát fogjuk igazolni. Ez vezet majd el egy bizonyos sorozat konvergenciájának felismeréséhez, végül pedig a határérték kiszámításához.

Legyen ABC hegyesszögű háromszög, oldalainak hosszúsága a , b és c . Jelöljük a háromszög köré írt kör sugarát R -rel, a háromszög területét T -vel. Ismeretes, hogy

$$(1) \quad T = \frac{abc}{4R}.$$

1988-12-433-1.eps

1. ábra

A háromszög magasságvonalait jelöljük AM_A , BM_B , CM_C -vel, a magasságpontot M -mel (1. ábra); legyenek a háromszög A , B , C csúcsánál lévő szögek rendre α , β , γ . Ekkor a magasságvonalak által levágott derékszögű háromszögekből

$$\begin{aligned} \angle AMB < &= 180^\circ - \angle M_A M B < = 180^\circ - (90^\circ - \angle M_A B M <) = \\ &= 90^\circ + \angle C B M_B = 90^\circ + (90^\circ - \gamma) = 180^\circ - \angle A C B <, \end{aligned}$$

tehát M -nek az AB oldalra vonatkozó M_3 tükörképe a háromszög köré írt körön van, és ugyanígy e körön helyezkedik el M -nek a BC , ill. AC oldalakra vonatkozó M_1 , ill. M_2 tükörképe is. A tükrözések miatt

$$MM_1 = 2 \cdot MM_A, \quad MM_2 = 2 \cdot MM_B, \quad MM_3 = 2 \cdot MM_C,$$

így az $M_A M_B M_C$ talpponti háromszöget M -ből kétszeresére nagyítva a körbe írt $M_1 M_2 M_3$ háromszöghöz jutunk. A talpponti háromszög köré írható kör R' sugara tehát

$$(2) \quad R' = \frac{1}{2}R.$$

A talpponti háromszög oldalainak hosszúságát a koszinusztétel segítségével határozhatjuk meg; például

$$\begin{aligned} M_A M_C^2 &= M_A B^2 + M_C B^2 - 2 M_A B \cdot M_C B \cdot \cos \beta = \\ &= c^2 \cos^2 \beta + a^2 \cos^2 \beta - 2ac \cos^3 \beta = (c^2 + a^2 - 2ac \cos \beta) \cos^2 \beta = b^2 \cos^2 \beta, \end{aligned}$$

azaz

$$(3) \quad M_A M_C = b \cos \beta,$$

hasonlóan

$$\begin{aligned} M_A M_B &= c \cos \gamma, \\ M_B M_C &= a \cos \alpha. \end{aligned}$$

(1), (2) és (3) alapján az $M_A M_B M_C$ háromszög T' területére:

$$(4) \quad T' = \frac{abc \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}{2R} = 2T \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma.$$

Ismeretes azonban (lásd pl. Reiman István: Fejezetek az elemi geometriából, 17–18. oldal), hogy egy háromszög α , β , γ szögeire

$$(5) \quad \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma \leq \frac{1}{8},$$

ezért (4) és (5) miatt

$$(6) \quad T' \leq \frac{1}{4}T.$$

(6)-ban pontosan akkor áll egyenlőség, ha (5)-ben is egyenlőség van, ez pedig az idézett eredmény szerint csak szabályos háromszögnél következik be.

Mivel az $M_A M_B M_C$ háromszöget M -ből kétszeresére nagyítva a négyszeres területű $M_1 M_2 M_3$ háromszöghöz jutunk, ezért az utóbbi területét T'' -vel jelölve, a (6) összefüggés így is írható:

$$(7) \quad T'' \leq T.$$

Vizsgáljuk meg, milyen eljárással lehet az $M_1 M_2 M_3$ háromszögből az eredeti ABC háromszöget visszakapni! Mivel például $AM_C C$ és $AM_A C$ közös átfogójú derékszögű háromszögek, ezért $AM_C M_A C$ húrnégyszög, tehát $AM_C M_A \sphericalangle = 180^\circ - \gamma$. Hasonlóan $BM_C M_B C$ is húrnégyszög, azaz $BM_C M_B \sphericalangle = 180^\circ - \gamma$, így $AM_C M_A \sphericalangle = BM_C M_B \sphericalangle$. Ebből tüstént következik, hogy a CM_C magasságvonal felezi az $M_A M_C M_B$ szöget, és így az $M_1 M_2 M_3$ szöget is. A kerületi szögek tétele szerint ekkor a C pont felezi az M_3 pontot nem tartalmazó $M_1 M_2$ körívet; hasonlóan A az $M_2 M_3$, B pedig a megfelelő $M_1 M_3$ körív felezőpontja. Ez a következő kérdést veti fel:

Legyen ABC egy tetszőleges háromszög, és legyenek rendre A_1, B_1, C_1 az ABC háromszög köré írt kör (a harmadik csúcsot nem tartalmazó) BC, AC, AB íveinek a felezőpontjai. Igaz-e, hogy az $A_1 B_1 C_1$ háromszög területe legalább akkora, mint az ABC háromszögnek a területe?

1988-12-435-1.eps

2. ábra

Megmutatjuk, hogy a kérdésre a válasz igenlő, ugyanis $A_1 B_1 C_1$ hegyesszögű háromszög, amelynek a magasságpontjából kétszeresére nagyított talpponti háromszöge éppen ABC . Jelöljük az ABC háromszög szögeit α, β, γ -val (2. ábra). Mivel az $A_1 B_1 C_1$ szöghöz tartozó körív fele az AC körívnek, ezért a kerületi szögek tétele értelmében

$$\begin{aligned} A_1 B_1 C_1 \sphericalangle &= \frac{1}{2} AB_1 C \sphericalangle = \frac{1}{2} (AB_1 B \sphericalangle + BB_1 C \sphericalangle) = \\ &= \frac{1}{2} (ACB \sphericalangle + BAC \sphericalangle) = \frac{1}{2} (\alpha + \gamma), \end{aligned}$$

hasonlóan

$$C_1 A_1 B_1 \sphericalangle = \frac{1}{2} (\beta + \gamma), \quad A_1 C_1 B_1 \sphericalangle = \frac{1}{2} (\alpha + \beta).$$

Az $\alpha + \beta, \alpha + \gamma, \beta + \gamma$ szögek valamennyien kisebbek 180° -nál, így $A_1 B_1 C_1$ valóban hegyesszögű háromszög. Nyilván

$$A_1 C_1 C \sphericalangle = \frac{1}{2} BC_1 C \sphericalangle = \frac{1}{2} BAC \sphericalangle = \frac{1}{2} \alpha,$$

tehát

$$A_1 C_1 C \sphericalangle + C_1 A_1 B_1 \sphericalangle = \frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{2} (\beta + \gamma) = 90^\circ,$$

azaz $A_1 B_1$ merőleges CC_1 -re, ugyanígy $A_1 C_1$ és BB_1 , illetve $B_1 C_1$ és AA_1 is merőlegesek. Ez a korábbiak szerint azt jelenti, hogy $A_1 B_1 C_1$ talpponti háromszögét a magasságpontból kétszeresére nagyítva ABC -hez jutunk, ezért (7) miatt az ABC háromszög területe legfeljebb akkora, mint az $A_1 B_1 C_1$ háromszöge. A $B_1 C_1, A_1 C_1, A_1 B_1$ körívek felezőpontjai által meghatározott $A_2 B_2 C_2$ háromszög területe ugyanígy nagyobb (vagy egyenlő) az $A_1 B_1 C_1$ háromszög területénél, és legfeljebb akkora, mint a belőle hasonlóan képezett $A_3 B_3 C_3$ háromszögnek a területe.

Az eljárást tovább folytathatjuk, és az így egymás után keletkező $A_2 B_2 C_2, A_3 B_3 C_3, A_4 B_4 C_4, \dots$ háromszögek területei egy növekvő számsorozatot alkotnak. Valamennyi háromszög területe kisebb az őket tartalmazó kör területénél; a területek sorozata tehát konvergens. Próbáljuk meg kiszámítani ezt a határértéket! A kiindulási háromszög oldalait a, b, c -vel, szögeit α, β, γ -val, a köréírt kör sugarát R -rel jelöljük. Mivel

$$a = 2R \sin \alpha, \quad b = 2R \sin \beta, \quad c = 2R \sin \gamma,$$

ezért az ABC háromszög területe (1) alapján

$$T_0 = \frac{abc}{4R} = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma,$$

illetve ugyanígy – az $A_n B_n C_n$ háromszög $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ szögeivel az $A_n B_n C_n$ háromszög területe

$$T_n = 2R^2 \sin \alpha_n \sin \beta_n \sin \gamma_n.$$

Az egymásra következő háromszögek képzési szabálya szerint a szögek sorozatára:

$$\alpha_{n+1} = \frac{\beta_n + \gamma_n}{2}, \quad \beta_{n+1} = \frac{\alpha_n + \gamma_n}{2}, \quad \gamma_{n+1} = \frac{\alpha_n + \beta_n}{2}.$$

Ennek az összefüggésnek és néhány kísérleti próbálkozásnak alapján az az érzésünk támadhat, hogy n növekedtével a szögek egyre inkább „kiegyenlítődnek”, azaz α_n, β_n és γ_n határértéke egyaránt 60° . Látni fogjuk, hogy ez valóban így is van. Valamivel általánosabban a következő állítást bizonyítjuk ehhez be:

(8) Ha x_0, y_0, z_0 tetszőleges valós számok, és az $(x_n), (y_n), (z_n)$ sorozatokat az

$$x_{k+1} = \frac{y_k + z_k}{2}, \quad y_{k+1} = \frac{x_k + z_k}{2}, \quad z_{k+1} = \frac{x_k + y_k}{2}$$

szabály szerint képezzük, akkor mindhárom sorozat konvergens, és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \frac{x_0 + y_0 + z_0}{3} = A.$$

Vegyük észre, hogy $x_n + y_n + z_n = x_0 + y_0 + z_0 = 3A$. Ezt az n -re vonatkozó teljes indukcióval láthatjuk be; $n = 0$ -ra állításunk nyilvánvalóan igaz. Tegyük fel, hogy $x_k + y_k + z_k = 3A$, ekkor

$$x_{k+1} + y_{k+1} + z_{k+1} = \frac{y_k + z_k}{2} + \frac{x_k + z_k}{2} + \frac{x_k + y_k}{2} = x_k + y_k + z_k = 3A,$$

tehát az állítás minden k -ra fennáll. Ennek felhasználásával kapjuk, hogy

$$x_{n+1} = \frac{y_n + z_n}{2} = \frac{3A - x_n}{2},$$

így

$$A - x_{n+1} = \frac{x_n - A}{2},$$

következésképpen (minden n -re)

$$|x_{n+1} - A| = \frac{|x_n - A|}{2}.$$

Ebből az n -re vonatkozó indukcióval egyszerűen adódik, hogy

$$|x_n - A| = \frac{|x_0 - A|}{2^n}.$$

Nyilván $|x_0 - A|$ nem függ n -től, $1/2^n$ pedig n növekedtével 0-hoz tart, így $|x_n - A|$ határértéke is 0, azaz (x_n) határértéke A ; ugyanígy bizonyítható be, hogy az $(y_n), (z_n)$ sorozatok is A -hoz tartanak.

A bizonyított (8) állítás felhasználásával az $A_n B_n C_n$ háromszögek területének határértéke már igen könnyen kiszámítható. (8) miatt ugyanis $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 60^\circ$, ezért a szinuszfüggvény folytonossága miatt – a háromszögek területének határértéke:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2R^2 \sin \alpha_n \sin \beta_n \sin \gamma_n = 2R^2 (\sin 60^\circ)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2.$$

A (8) állítás bizonyításának mintájára könnyen igazolhatjuk (8) következő általánosítását:

(9) Legyenek $a_1^{(1)}, a_1^{(2)}, \dots, a_1^{(k)}$ tetszőleges valós számok, és képezzük az $(a_n^{(1)}), (a_n^{(2)}), \dots, (a_n^{(k)})$ sorozatokat az

$$a_{n+1}^{(l)} = \frac{1}{k-1} (-a_n^{(l)} + \sum_{i=1}^k a_n^{(i)})$$

szabály szerint ($l = 1, 2, \dots, k$). Ekkor az $(a_n^{(l)})$ sorozatok konvergensnek, és közös határértékük:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{(l)} = \frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^k a_1^{(i)}.$$

A (9) állításból az $a_1^{(1)} = a_1, a_1^{(2)} = a_1^{(3)} = \dots = a_1^{(k)} = a_2$ speciális eset révén a következőt bizonyíthatjuk be:

(10) *Ha a_1 és a_2 valós számok és k 2-nél nagyobb pozitív egész, akkor az*

$$a_n = \frac{a_{n-2} + (k-2)a_{n-1}}{k-1} \quad (n = 3, 4, 5, \dots)$$

rekurzióval képezett (a_n) sorozat konvergens, és a határértéke:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{a_1 + (k-1)a_2}{k}.$$

Hausel Tamás
(Budapest, Fazekas M. Gimn., III. o. t.)