

A KöMaL 2697. sz. feladatára nem érkezett be egyetlen helyes megoldás sem. Ennek fő oka az volt, hogy a beküldők azt a feltételt, hogy egy gráfot önmagába képezünk, úgy értelmezték, hogy a leképezés önmagára történik, azaz minden csúcs fellép valamelyik csúcs képeként (noha ezek különbözőségére már az elsős gimnáziumi tankönyv is felhívja a figyelmet). Ilyen félreértések elkerülése végett néhány alapvető fogalmat szeretnénk tisztázni.

Emellett néhány ekvivalens fogalmat és elemi tételecskét is megmutatunk, hogy az olvasó egy-egy fogalom más-más oldalával is találkozhasson.

I. Relációk

Reláción halmazok elemei közötti *kapcsolatot* értünk. Egészen általánosan adva van két halmaz A és B ; és bizonyos A -beli elemek állnak kapcsolatban valamilyen B -beli elemekkel. Ezt a kapcsolatot rendszerint valamilyen módon leírjuk. Arra nincs lehetőségünk, hogy *minden lehetséges* kapcsolatot valamilyen utasítással adjunk meg. Azt viszont megtehetjük, hogy *felsoroljuk* azokat a párokat, amelyekre a kapcsolat fennáll. Akkor is megtehetjük ezt, ha a tényleges felsorolás nem kerestülvihető.

Az összes szóba jövő párok halmazát $A \times B$ jelöli; ez a halmaz mindazon (a, b) párokból áll, amelyekre $a \in A$ és $b \in B$ teljesül. Egy relációt tehát úgy tekinthetünk, mint az $A \times B$ halmaz valamely R részhalmazát.

Az A -beli a és B -beli b elemek pontosan akkor vannak R relációban, ha $(a, b) \in R$.

(Ezt a kapcsolatot sokszor aRb -vel is jelöljük. Például az $A = B$ esetben az „egyenlőség” relációt úgy definiáljuk, hogy két elem pontosan akkor áll egymással a relációban, ha megegyezik. Ha a relációt, mint az $A \times A$ részhalmazát az $=$ jel jelöli, akkor a és b egyenlőségét $(a, b) \in$ helyett $a = b$ jelöli.)

A relációkból kiindulva két úton megyünk tovább. Először olyan relációkat nézünk, ahol a két halmaz megegyezik; majd az általános fogalmat úgy szűkítjük le, hogy a függvény fogalmához jussunk.

II. Irányított gráfok

Nézzük most azt az esetet, amikor a B halmaz megegyezik az A -val. Ekkor az $A \times A$ valamely R részhalmazáról van szó, és azt mondjuk, hogy R egy reláció az A -n (vagy az A egy relációja).

Ha R egy reláció az A -n, akkor (A, R) -t egy irányított (egyszerű) gráfnak nevezzük.

Ez már „gráfelméleti nézőpont”; ezért elmondjuk az itt használatos elnevezéseket. Az A elemei a gráf csúcsai, vagy csúcspontjai, vagy szögpontjai. Az R elemei (irányított) élek. Ezt úgy képzelhetjük el, hogy ha $(a, b) R$ -beli, akkor egy „nyilat” húzunk az a csúcstól a b csúcsig. A gráf elnevezésében erre utal az „irányított” szó; míg az „egyszerű” azt fejezi ki, hogy az a -ból a b -be egyetlen nyilat rajzolunk. Ha $(a, b) R$ -beli, akkor azt mondjuk, hogy az a csúcsban hurok van.

III. Irányítatlan gráfok

Az A halmazon adott R relációt szimmetrikusnak nevezzük, ha valahányszor (a, b) eleme R -nek, mindannyiszor (b, a) is R -hez tartozik.

Ha R egy szimmetrikus reláció az A -n, akkor (A, R) neve (irányítatlan) gráf.

A szimmetria miatt, ha $(a, b) R$ -beli, akkor úgy képzelhetjük, hogy a köztük levő nyílnak „két feje van”, mind az a , mind a b irányában. Éppen ezért ezeket a fejeket el is hagyhatjuk, hiszen nem kell az irányokat megkülönböztetni. (Megemlítjük, hogy a hurok minden esetben irányítatlan élnek tekinthető.)

IV. Rendezés

E címszó alatt a „kisebb vagy egyenlő” fogalmát szeretnénk megfogalmazni. Ehhez a relációk három tulajdonságára van szükségünk.

Az A halmazon értelmezett R relációt *reflexív*-nek nevezzük, ha bármely A -beli a esetén $(a, a) R$ -beli.

Az R reláció *transzitiv*, ha valahányszor (a, b) és $(b, c) R$ -beliek, mindannyiszor (a, c) is R -ben van.

Az R reláció *antiszimmetrikus*, ha (a, b) és (b, a) csak akkor lehet R -beli, ha $a = b$.

(Jegyezzük meg, hogy nem tettük itt fel azt, hogy (a, a) feltétlenül R -beli.)

Egy R reflexív, antiszimmetrikus és transzitiv reláció neve: *részben-rendezés*.

Részben-rendezést alkotnak például a természetes számok az oszthatóságra mint relációra nézve: Minden szám osztható önmagával (reflexív), ha a osztója b -nek és b osztója c -nek, akkor a is osztója c -nek (transzitiv), végül pedig ha a és b mindegyike osztója a másikkal, akkor biztosan egyenlőek (antiszimmetria).

Ez a reláció nem olyan, mint a számok „sorbarakása”, mert itt összehasonlíthatatlan elemek is vannak; pl. 2 és 3 egyike sem osztója a másikkal. Ha az összehasonlíthatóságot is megköveteljük, akkor kapjuk a rendezést (vagy elrendezést).

Az A halmazon értelmezett R részbenrendezést *rendezésnek* nevezzük, ha bármely A -beli a és b elemek esetén (a, b) és (b, a) valamelyike R -ben van.

Természetesen ilyen rendezés az egész, racionális stb. számoknak a nagyság szerinti összerakása.

(Megjegyezzük, hogy sok esetben a rendezést úgy definiálják, hogy azzal ne a „kisebb-egyenlő”, hanem a „kisebb” fogalmát írják le. Ez a reláció „irreflexív”, és az antiszimmetriát is másképpen kell megfogalmazni.)

V. Ekvivalencia reláció

Ez a reláció az „ugyanúgy viselkedést” fogalmazza meg.

Az A halmazon értelmezett reflexív, szimmetrikus és tranzitív R relációt ekvivalencia-relációnak nevezzük.

Ilyen reláció például a sík háromszögein az egybevágóság. Ilyen reláció a sík egyenesei között a párhuzamosság (az egymással párhuzamos egyeneseknek „közös tulajdonsága” az irányuk). Ilyen R relációt kaphatunk például az egész számokon, ha azt mondjuk, hogy (a, b) legyen R -beli, ha $a - b$ osztható 5-tel (5 helyett bármely más egész szám megfelelne).

Az ekvivalencia-relációknak a függvényekkel való kapcsolatára még visszatérünk.

VI. Függvények

A függvény fogalmának pontos definiálása igen körülményes volna; de ez nem is feltétlenül szükséges. Azt kell viszont megérteni, hogy mi egy függvény. Akkor beszélünk az A halmazt a B halmazba *leképező* függvényről, ha az A halmaz minden egyes eleméhez *hozzárendelünk* egy B -beli elemet. Persze a fenti magyarázat olyan szavakat tartalmaz, amelyeket értünk ugyan, de éppen úgy nincsenek definiálva, mint a függvény. Mindenesetre, a fenti eszmefuttatás arra jó, hogy indokolja: a *függvény* szó helyett ugyanebben az értelemben használhatjuk (és használjuk) a *leképezés* és a *hozzárendelés* szavakat.

Most néhány (jól ismert) elnevezést és jelölést közlünk:

Azt a tényt, hogy az f függvény az A halmazt képezi le a B halmazba, úgy jelöljük, hogy

$$f : A \rightarrow B$$

Az A halmaz az f értelmezési tartománya. B -t szokták az f értékkészletének nevezni, ez azonban azt a félreértést sugallja, hogy B pontosan az f értékeiből áll. Ennek elkerülése végett mi B -t az f képtartományának fogjuk hívni.

Ha $a \in A$, akkor azt a B -beli elemet, amelyre f az a elemet képezi, $f(a)$ jelöli. Ha $b = f(a)$, akkor ezt a tényt úgy is jelöljük, hogy

$$f : a \mapsto b.$$

(Vegyük észre, hogy itt a nyílnak egy „talpa” is van. Ez azt mutatja, hogy a függvény a nyíl bal oldalán álló elemet a jobb oldali elemre képezi le.)

Az alábbiakban a függvény fogalmát kissé elbonyolítjuk avégett, hogy lehetőségünk nyíljon a „precízkedés”-re.

Az $f : A \rightarrow B$ függvény azzal van megadva, ha megmondjuk minden egyes A -beli elemnek a képét. Más szóval fel kell sorolni az összes $(a, f(a))$ párokat. Ilyen párok halmaza viszont nem más, mint egy reláció az A és B halmazok között. Ha ezt a relációt $R(f)$ -fel jelöljük, akkor azt kapjuk, hogy az $A \times B$ halmaz $R(f)$ részhalmazának elemei éppen az $(a, f(a))$ alakú párok.

Hogyan ismerhető fel, hogy ez a reláció egy függvényt ad? Úgy, hogy a párok első eleme egyértelműen meghatározza a második elemét. Ez módot ad arra, hogy a függvényt a relációk segítségével definiálhassuk:

Az $A \times B$ egy R részhalmazát akkor nevezzük az A -t B -be képező függvénynek, ha $(a, u), (a, v) \in R$ -ből $u = v$ következik. (Ez csak egy definiálási lehetőség, mi valójában tudjuk, mi a függvény).

Most a függvények néhány speciális fajtájával ismerkedünk meg:

I. Szürjektív függvény. Az $f : A \rightarrow B$ függvény értékei, tehát az $f(a)$ elemek a B -ben vannak. Az azonban nem feltétlenül igaz, hogy minden B -beli elem ilyen alakú volna. (Legyen például $A = B$ a pozitív egészek halmaza, és $f(i) = i + 1$. Ez esetben az 1 szám B -ben van, de nem írható $f(i)$ alakban.) A B $f(a)$ alakú elemeinek a halmazát az f értékkészletének nevezzük.

Az f függvényt szürjektívnek nevezzük, ha értékkészlete megegyezik képtartományával.

Ez az az eset, amikor a függvény a képtartományba képez le.

2. Injektív függvény. Ez a fogalom a szürjektivitás „duálisa”. Egy függvényt akkor nevezünk injektívnek, ha különböző elemek képe is különböző. Az előbbi $f : i \mapsto i + 1$ függvény például injektív. Nem injektív azonban az a pozitív egészekben értelmezett g függvény, amelyre $g(i) = i - 1$, ha $i > 1$, és $g(1) = 1$. (Viszont g nyilván szürjektív.)

A g függvényt injektívnek nevezzük, ha $g(a) = g(b)$ esetén $a = b$ is fennáll.

Természetesen vannak olyan függvények, amelyek nem szürjektívek és nem is injektívek. Képezzük például a pozitív egészek halmazát önmagába úgy, hogy minden egész szám képe legyen a 3. Nem ennyire triviális az a h függvény, amelyre $h(2i) = 2i - 1$ és $h(2i + 1) = 2i + 1$.

Az előzőekben olyan függvényeket láttunk, amelyek a pozitív egészek halmazát önmagába képezték le; egyikük injektív volt, de nem szürjektív; másikuk szürjektív volt, de nem injektív. Ez véges halmazok esetén nem lehetséges.

Tétel: Legyen A véges halmaz. Az $f : A \rightarrow A$ függvény pontosan akkor injektív, ha szürjektív.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy A -nak n darab eleme van. Nem megy az általánosság rovására, ha feltesszük, hogy az A elemei éppen az $1, 2, \dots, n$ természetes számok. Az f függvény értékei az $f(1), f(2), \dots, f(n)$ számok. Ezeknek a száma legfeljebb n ; mert nem feltétlenül különbözőek. Az f függvény injektivitása pontosan azt jelenti, hogy a kapott függvényértékek mind különbözőek – tehát számuk n . Ez viszont éppen azt jelenti, hogy az A halmaz n eleméből n darab függvényérték, azaz mindegyik – vagyis a függvény szürjektív.

A fenti függvénytípusoknak szoros kapcsolata van az egyenletek megoldhatóságával. Az f szürjektivitása azt mondja, hogy B minden b eleme előfordul képként; vagyis az $f(x) = b$ egyenlet mindig megoldható. A g injektivitása azt

jelenti, hogy különböző elemek képe is különböző, azaz amennyiben a $g(x) = b$ egyenletnek van megoldása, akkor ez a megoldás egyértelmű.

3. *Bijektív függvény.* Ez a fenti két függvénytípus egyesítése:

Az f függvényt akkor nevezzük bijektívnek (kölsönösen egyértelműnek), ha injektív és szürjektív.

4. *Függvények kompozíciója.*

Az $f : A \rightarrow B$ és $g : B \rightarrow C$ függvények kompozícióján azt a $gf : A \rightarrow C$ függvényt értjük, amelyre $gf : a \mapsto g(f(a))$, minden $a \in A$ esetén.

Vegyük észre, hogy az f és a g sorrendje nagyon fontos (ha C és A különbözőek, akkor nincs is értelme annak, hogy fg). Így a kompozíció mint függvények közötti művelet nem is lehet kommutatív.

*

Feladat: Mutassuk meg, hogy a kompozíció mint függvények közötti művelet asszociatív (ha elvégezhető).

*

Minden egyes halmazon külön-külön értelmezhető egy triviálisnak tűnő, de nagyon fontos függvény:

Az A halmaz identitásfüggvényének nevezzük azt az $i_A : A \rightarrow A$ függvényt, amelyre minden A -beli a esetén $i_A : a \mapsto a$.

Tétel: Ha $f : A \rightarrow B$ és $g : C \rightarrow A$ tetszőleges függvények, akkor $fi_A = f$ és $i_Ag = g$.

Bizonyítás Tetszőleges A -beli a -ra $fi_A(a) = f(i_A(a)) = f(a)$; és tetszőleges C -beli c -re $i_Ag(c) = i_A(g(c)) = g(c)$. (Megjegyezzük, hogy ez a tulajdonsága csak az identitásfüggvényeknek van meg. Ez azt jelenti, hogy az identitásfüggvények jellemezhetők a függvénykompozíció segítségével; anélkül, hogy megmondanánk, mi az identitásfüggvény definíciója.)

Az identitásfüggvények segítségével jellemezhetők az injektív, szürjektív és bijektív függvények is. Ehhez azonban mindenekelőtt szükség van három elnevezésre:

Ha az f függvényhez található olyan g függvény, amelyre gf identitásfüggvény, akkor g -t az f egy bal inverzének nevezzük; ha olyan h függvény található, amelyre fh identitásfüggvény, akkor h az f egy jobb inverze; amennyiben olyan k függvényt találunk, amelyre mind fk mind kf identitás, akkor azt mondjuk, hogy k az f (egy) inverze.

Megjegyezzük, hogy sem a bal inverz, sem a jobb inverz nem egyértelmű, de az inverz igen.

Legyen pl. A a valós számok, B pedig az egész számok halmaza. Jelölje f azt az $A \rightarrow B$ függvényt, amelyre $f(a) = [a]$ (az a egész része). Ha $0 \leq r < 1$, és a $g_r : B \rightarrow A$ függvényre $g_r(b) = b + r$, akkor tetszőleges B -beli b -re $fg_r(b) = f(g_r(b)) = f(b + r) = [b + r] = b$, tehát $fg_r = i_B$; azaz minden ilyen g_r jobb inverze az f -nek. Legyen $h : B \rightarrow B$ az a függvény, melyre $h(b) = 8 \cdot b$. Tetszőleges, 8-nál kisebb nemnegatív n egész számmal értelmezzük a

$K_n : B \rightarrow B$ függvényeket a következőképpen : $K_n(b) = \left\lfloor \frac{b+n}{8} \right\rfloor$. Ha $b \in B$, akkor $K_nh(b) = K_n(8b) = \left\lfloor b + \frac{n}{8} \right\rfloor = b$,

tehát a $K_0, K_1, \dots, K_7$ függvények valamennyien bal inverzei h -nak.

*

Feladat: Igazoljuk, hogy $K_0, K_1, \dots, K_7$ páronként különböző függvények. Mutassuk meg továbbá, hogy ezeken kívül h -nak még végtelen sok bal inverze van.

*

Tétel: Az f függvénynek pontosan akkor van bal inverze, ha injektív; pontosan akkor van jobb inverze, ha szürjektív; és pontosan akkor van inverze, ha bijektív.

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $f : A \rightarrow B$ injektív, és definiáljuk a g függvényt a következőképpen: $g(f(a)) = a$, a B minden $f(a)$ alakú elemére; és definiáljuk akárhogyan a B összes többi elemére. Az f injektivitása következtében ezzel egy függvényt definiáltunk, amire $gf(a) = g(f(a)) = a = i_A(a)$; azaz $gf = i_A$.

Legyen most $f : A \rightarrow B$ szürjektív. Ez azt jelenti, hogy minden B -beli b előáll $f(a)$ alakban. Válasszunk ki tehát minden egyes b elemhez olyan a -t, amelyre $f(a) = b$; és legyen h az a függvény, amely az adott b -hez pontosan ezt az a -t rendeli. Az f szürjektivitása miatt egy függvényt értelmeztünk; erre a függvényre $fh(b) = fh(f(a)) = f(h(f(a))) = f(a) = b = i_B(b)$ teljesül, és így $fh = i_B$.

Ha f bijektív, akkor a fent definiált két függvény megegyezik; és így f -nek létezik inverze.

Az állítás megfordításánál is három eset van, amelyek közül az első kettő együtt bizonyítható. Azt kell megmutatni ugyanis, hogy ha gf identitás, akkor f injektív, és ha fh identitás, akkor f szürjektív. Ezt úgy is fogalmazhatjuk, hogy ha egy kétféle kompozíció identitás, akkor az első tényező szürjektív, a második pedig injektív.

Legyen tehát $gf = i_A$. Ha f az A halmazt a B -be képezi le, akkor g természetesen a B -t képezi le A -ba.

Tegyük fel, hogy $f(u) = f(v)$. Ekkor

$$u = i_A(u) = gf(u) = g(f(u)) = g(f(v)) = gf(v) = i_A(v) = v;$$

tehát f injektív.

Továbbá tetszőleges A -beli a -ra $g(f(a)) = gf(a) = i_A(a) = a$, vagyis g , szürjektív.

Azt kell megmutatni, hogy ha f -nek van inverze, akkor f bijektív. Ez viszont világos, hiszen ha van inverze, akkor van bal inverze is és jobb inverze is; így a már bizonyítottak alapján injektív is és szürjektív is.

Most megmutatunk egy érdekes ténnyt:

Tétel: *Ha az f függvénynek van bal inverze és jobb inverze is, akkor csak egyetlen bal inverze és csak egyetlen jobb inverze van; és ezek is megegyeznek.*

Bizonyítás: Legyen $f : A \rightarrow B$ és g tetszőleges bal inverz, h tetszőleges jobb inverz. Ez azt jelenti, hogy $gf = i_A$ és $fh = i_B$. Ebből azonnal következik, hogy g is és h is B -t képezi le A -ba. Így $i_A h = h$ és $gi_B = g$. Ezt felhasználva (az asszociativitás alapján) a következőket kapjuk:

$$g = gi_B = g(fh) = (gf)h = i_A h = h,$$

ami bizonyítja állításunkat.

Végezetül megadjuk, hogy milyen kapcsolatban vannak a függvények az ekvivalencia-relációkkal:

Tétel:

„ $(u, v) \in R \subseteq A \times A$ akkor és csak akkor, ha $f(u) = f(v)$ ” ekvivalenciareláció. Ha $f : A \rightarrow B$ tetszőleges függvény, akkor a következő reláció:

„ $(u, v) \in R \subseteq A \times A$ akkor és csak akkor, ha $f(u) = f(v)$ ” ekvivalenciareláció.

Bizonyítás: $f(u) = f(v)$ bizonyítja a reflexivitást. A szimmetria a reláció szimmetrikus definíciójából következik. Ha $f(u) = f(v)$ és $f(v) = f(w)$, akkor természetesen $f(u) = f(w)$, ami bizonyítja a reláció tranzitivitását.

(Megjegyezzük, hogy minden ekvivalenciarelációhoz található olyan függvény, amelyből az ekvivalenciarelációt a fenti módon kaphatjuk.)

VII. Morfizmusok

Az eddigiekben azt tettük fel, hogy A és B tetszőleges halmazok, és $f : A \rightarrow B$ valamilyen függvény. A matematikában azonban általában valamilyen „struktúra” is adott e halmazokon. Mi most csak arra gondolunk, hogy e halmazokon valamilyen művelet vagy reláció van adva. (Például mindegyikük egy számhalmaz, amelyben elvégezhető az összeadás, vagy mindketten irányított gráfok.)

Ilyen esetekben fontosak azok a függvények, amelyek a struktúrát megtartják. Ezeket a függvényeket homomorfizmusoknak nevezzük. Ha például összeadásról van szó, akkor a feltétel azt mondja, hogy $w = u+v$ esetén $f(w) = f(u)+f(v)$. Gráfok esetén a feltétel úgy szól, hogy ha u -ból megy nyíl v -be, akkor $f(u)$ -ból is megy nyíl $f(v)$ -be.

A homomorfizmusok esetén is használjuk a függvényeknél elmondott neveket; így beszélünk injektív, szürjektív és bijektív homomorfizmusokról. Van azonban két fontos speciális eset is, amelyeknek külön nevük van;

Az $f : A \rightarrow A$ morfizmust endomorfizmusnak nevezzük; amennyiben pedig ez bijekció, akkor a neve automorfizmus.

Így a 2697. feladatnál azt kellett bizonyítani, hogy a mondott gráfnak egyetlen endomorfizmusa az identitás. (Az identitás nyilván mindig homomorfizmus.)

Végezetül egy érdekes dolgot említünk meg. A bijektív függvényekről beláttuk, hogy azoknak van inverzük. Morfizmusok esetében az a probléma, hogy ez az inverz vajon maga is morfizmus-e. Ha a struktúrában csak műveletek vannak, akkor be lehet bizonyítani, hogy ez így van. Mutatunk viszont egy példát, hogy gráfokra az inverz nem mindig morfizmus.

Legyen A az egészek halmaza; és az R reláció álljon azokból az $(i, i+1)$ párokból, amelyekre i pozitív. Az $f : A \rightarrow A$ függvényre legyen $f(i) = i+1$. Világos, hogy f morfizmus. Az is világos, hogy az f -nek a g inverzére $g(i) = i-1$ (egy ilyen van, mivel tudjuk, hogy az inverz egyértelmű). Ezzel szemben nem tartja meg a relációt, hiszen $(1, 2)$ relációban van, míg g -t alkalmazva a kapott $(0, 1)$ nincsen.