

A feladatok megoldása a versenyzőktől származik (kivéve a 6. feladat 2. megoldását). A megoldók érzékeltetni próbálták azt is, hogy milyen úton jutottak el a megoldáshoz, milyen ötletek, meggondolások segítették munkájukat.

A 6., legnehezebb feladat második megoldását Pataki János írta le.

1. feladat. Adott a síkban két azonos középpontú kör, melyek sugara R és r ($R > r$). P a kisebb kör egy fix pontja, B pedig végigfut a nagyobb körön. A BP egyenes másik metszéspontja a nagyobb körrel C . A BP -re P -ben állított „ l ” merőleges másik metszéspontja a kisebb körrel A (ha „ l ” a kör érintője P -ben, legyen $A = P$).

I. Határozzuk meg a $BC^2 + CA^2 + AB^2$ által felvett értékek halmazát.

II. Határozzuk meg az AB szakasz felezőpontjának mértani helyét.

(Luxemburg)

Megoldás. I. Legyen O a két kör középpontja. Tegyük fel, hogy P , O , B nincsenek egy egyenesen. Messe PB az r sugarú kört másodszor Q -ban. Mivel B és C szerepe felcserélhető, feltehetjük, hogy Q a P és B között fekszik. P -ből $QA \perp 90^\circ$ alatt látszik, tehát QA átmérő. $CP = QB = a$ (hiszen pl. $CPO\Delta \simeq BQO\Delta$, két oldal és a nagyobbikkal szemközi szögben megegyezik).

1988-10-291-1.eps

1988-10-291-2.eps

A Pitagorasz-tételt alkalmazva:

$$\begin{aligned} AB^2 + BC^2 + CA^2 &= PA^2 + (PQ + a)^2 + (PQ + 2a)^2 + PA^2 + a^2 = \\ &= 2(PA^2 + PQ^2) + 6a(a + PQ). \end{aligned}$$

Viszont a PQA háromszögből $PA^2 + PQ^2 \simeq 4r^2$, P -nek az R sugarú körre vonatkozó hatványa

$$a(a + PQ) = CP \cdot PB = R^2 - r^2,$$

tehát $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 6R^2 + 2r^2$ még akkor is, ha C , P , O , B egy egyenesen vannak. A vizsgált érték tehát állandó.

II. Jelöljük B -nek a PA felezőmerőlegesére való tükörképét B' -vel. B' az R sugarú körön van, mivel f mindkét körnek szimmetriatengelye. $PAB'B$ téglalap, $PB = AB'$ és $APB \angle = PAB' \angle = 90^\circ$, így AB felezőpontja egybeesik PB' felezőpontjával. Ahogy B körbefut, B' is, így AB felezőpontja az R sugarú kör P -ből felére kicsinyített képén fekszik. Az extrém esetben e kör egy átmérője végpontjain.

Beke Tibor (Nagyatád, Ady E. Gimn., III. o. t.)

A feladat megfelelt annak a tradíciónak, hogy az első nap első példája a legkönnyebb a hat közül. Az ábra szinte követeli a Pitagorasz-tétel alkalmazását. A második rész is teljesen elemi, a trükk talán csak az, hogy az ember analitikus vagy vektoros megoldásra gyanakszik először, ami biztosan létezik, de nem ilyen egyszerű. Az ötlet a versenyen elég későn jutott csak eszembe.

2. feladat. Legyen n pozitív egész szám, és legyenek $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$ a B halmaz részhalmazai. Tegyük fel, hogy

a) mindegyik A_i -nek pontosan $2n$ eleme van,

b) minden $A_i \cap A_j$ metszetnek ($1 \leq i < j \leq 2n+1$) pontosan egy eleme van,

c) a B halmaz minden eleme benne van legalább két A_i -ben.

n milyen értékeire rendelhető hozzá B minden eleméhez a 0 és 1 számok egyike úgy, hogy minden A_i -nek pontosan n olyan eleme legyen, amelyhez a 0-t rendeltünk?

(Csehszlovákia)

Megoldás. Először azt bizonyítom be, hogy a B halmaz minden eleme pontosan két A_i -ben fordul elő. A c) feltétel szerint minden elem legalább két A_i -ben szerepel, ezért elegendő azt megmutatni, hogy egyik elem sem fordul elő legalább három részhalmazban.

Tegyük fel, hogy X mégis eleme az A_i, A_j, A_k halmazoknak, ebből ellentmondáshoz fogunk jutni. A b) feltétel szerint az A_i, A_j, A_k halmazok közül semelyik kettőnek nincs az X -től különböző közös eleme. A három halmaz X -en kívüli, összesen $3 \cdot (2n - 1)$ eleme így mind különböző. A továbbiakban nevezzük ezeket „mókás” elemeknek.

A c) feltétel szerint minden mókás elem előfordul legalább egyszer a további $2n - 2$ halmazban. Összesen $3 \cdot (2n - 1)$ mókás elem van, ezért valamelyik halmazban közülük 4 fordul elő ($3(2n - 2) < 3(2n - 1)$). Ekkor ennek a halmaznak

az A_i, A_j, A_k valamelyikével legalább 2 közös eleme van, ami ellentmond a $b)$ feltételnek. Ezzel beláttuk, hogy a B halmaz minden eleme pontosan két A_i -ben szerepel.

Tegyük fel ezután, hogy megadtuk a megfelelő hozzárendelést a B halmaz elemein. Mivel minden A_i -nek n eleméhez rendeltünk 0-t, ezért halmazonként leszámolva összesen a $n(2n+1)$ elemhez rendeltünk 0-t. Láttuk másfelől, hogy minden elem pontosan két halmazban fordul elő, ezért a B halmaz $\frac{n(2n+1)}{2}$ eleméhez rendeltünk 0-t. Ez pedig csak akkor egész, ha n páros, tehát szükséges feltétel, hogy n páros legyen.

Be fogjuk bizonyítani, hogy ez a feltétel elégséges, ilyenkor megadható az előírt hozzárendelés. Írjuk fel egy szabályos $(2n+1)$ -szög csúcsaira az $1, 2, \dots, 2n+1$ számokat. Húzzuk be azokat az átlókat, melyek két olyan csúcsot kötnek össze, melyek között legfeljebb $\frac{n}{2} - 1$ csúcs van. (Ez egész, mivel n páros.) Így minden csúcsból n átlót húztunk be.

Jelöljük A_i és A_j közös elemét (i, j) -vel $(i < j)$. Ez egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, mivel minden elem pontosan két halmazban szerepel, és $b)$ fennáll.

(i, j) -hez pontosan akkor rendeljük 0-t, ha az i és j csúcs közötti átlót behúztuk. Mivel minden csúcsból n átló indul, ezért ez egy megfelelő hozzárendelés.

Tehát akkor és csak akkor végezhető el megfelelő hozzárendelés, ha az n páros.

Keleti Tamás (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o. t.)

3. feladat. Definiáljuk az f függvényt a pozitív egészekben oly módon, hogy

$$f(1) = 1, \quad f(3) = 3,$$

továbbá

$$\begin{aligned} f(2n) &= f(n) \\ f(4n+1) &= 2f(2n+1) - f(n) \\ f(4n+3) &= 3f(2n+1) - 2f(n) \end{aligned}$$

minden pozitív egész n -re.

Határozzuk meg azon, $1 \leq n \leq 1988$ -nak eleget tevő egész n -nek számát, amelyekre $f(n) = n$ teljesül.

(Anglia)

Megjegyzés. Ez tipikusan olyan feladat, amelynek a megoldásához egy ötlet kell. A megfelelő ötlet hiányában a megoldás szinte reménytelen.

A függvény definíciója alapján könnyű az első néhány értéket kiszámolni. A versenyen többen kiszámolták az első 50–60 értéket, de abból nem sok szabályosság látszott. Néhány részeredményünk:

- $f(2^k \pm 1) = 2^k \pm 1$
- $f(3 \cdot 2^k \pm 3) = 3 \cdot 2^k \pm 3$ (sejtés)
- $f(f(x))$, ha x páratlan (sejtés)
- 2-hatványok osztási maradékát érdemes megvizsgálni.

Ezek után lássuk a Megoldást!

Megoldás. Vegyük észre, hogy ha n kettes számrendszerbeli jegyeit visszafele olvassuk (jobbról balra), akkor $f(n)$ -et kapjuk! Ezt az állítást n szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Nyilván:

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 1, \quad f(3) = 3, \quad f(4) = 1.$$

Tegyük fel, hogy az állítás $(n-1)$ -ig igaz, és bizonyítsuk n -re.

a) $n = 2k$ esetén legyen $f(k) = z$.

$$f(n) = f(2k) = f(k) = z.$$

b) Ha $n = 4k+1$, legyen $2^{t-1} \leq k < 2^t$, és $f(k) = z$,

$$f(n) = 2f(2k+1) - f(k) = 2 \cdot (2^{t+1} + z) - z = 2^{t+2} + z.$$

c) Ha $n = 4k+3$, legyen $2^{t-1} \leq k < 2^t$, és $f(k) = z$,

$$f(n) = 3f(2k+1) - 2f(k) = 3 \cdot (2^{t+1} + z) - 2z = 3 \cdot 2^{t+1} + z.$$

A feladat megoldásait tehát azok az 1 és 1988 közé eső számok adják, melyeket ha kettes számrendszerben írunk fel, visszafele olvasva ugyanazt kapjuk. Ezeket hívjuk *palindrom* számoknak. Számoljuk össze őket.

A kettes számrendszerben $2n$ jegyű palindrom 2^{n-1} van, mert az első számjegy 1, a másodiktól az n -edik helyig állhat 0 vagy 1, ez 2^{n-1} lehetőség, és az utolsó n jegy egyértelműen meghatározott.

Hasonló okból $2n + 1$ jegyű palindrom 2^n db van.

1988 a kettes számrendszerben: 11111000100 (11 jegyű). Ennél a legfeljebb 10 jegyű palindromok mind kisebbek. Ezek száma 62. Az 1988 a 11 jegyű palindromok közül az $1967 = 11110101111$ és $2015 = 11111011111$ közé esik, ezért az 1988-nál kisebb 11 jegyű palindromok száma 30.

Összesen tehát a feladatnak 92 db megoldása van.

Csirik János (Szeged, JATE Ságvári E. Gyak. Gimn., II. o. t.)

4. feladat. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \geq \frac{5}{4}$$

egyenlőtlenségnek eleget tevő valós számok halmaza diszjunkt intervallumok egyesítése, melyek összhossza 1988.

(Írország)

Megoldás. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k}; \quad I_0 = (-\infty, 1), \quad I_1 = (1, 2), \quad I_2 = (2, 3), \dots$$

$$\dots, \quad I_i(i, i+1), \quad \dots, \quad I_{69} = (69, 70), \quad I_{70} = (70, +\infty).$$

Az $f(x)$ értelmezési tartománya $I_0 \cup I_1 \cup \dots \cup I_{70}$, mivel $f(x)$ az 1, 2, 3, ..., 70 értékek kivételével nyilván mindenütt értelmes. $f(x)$ az értelmezési tartományában folytonos, mert folytonos függvények összegeként áll elő.

1988-10-294-1.eps

Az egyes intervallumokban $f(x)$ szigorúan monoton csökken, hiszen szigorúan monoton csökkenő függvények $\left(\frac{1}{x-1}, \frac{2}{x-2}, \dots, \frac{70}{x-70}\right)$ összegeként áll elő.

I_0 -ban a függvény csak negatív értékeket vesz fel, az $\frac{1}{x-1}, \frac{2}{x-2}, \dots, \frac{70}{x-70}$ törtek mindegyike negatív ebben az intervallumban.

Az $I_1, I_2, \dots, I_{69}$ intervallumban $f(x)$ minden valós értéket felvesz, az egyes intervallumokon belül $f(x)$ folytonos, másrészt, mint azt látni fogjuk, az intervallumok bal oldalán $f(x)$ jobb oldali határértéke $+\infty$; az intervallumok jobb oldalán $f(x)$ bal oldali határértéke $-\infty$. Ezt a következő módon láthatjuk be: legyen „a” az 1, 2, 3, ..., 70 egészek bármelyike. Ekkor

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} \sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} = \sum_{k=1}^{70} \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{k}{x-k} = +\infty,$$

$k = a$ esetén

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{k}{x-k} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{a}{x-a} = +\infty,$$

minden más esetben $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{k}{x-k}$ véges. Hasonlóképpen igaz, hogy $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = -\infty$.

Már láttuk, hogy $f(x)$ -nek az $x = 70$ helyen vett jobb oldali határértéke $+\infty$. Másrészt igaz az is, hogy $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, hiszen $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sum_{k=1}^{70} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k}{x-k} = \sum_{k=1}^{70} 0 = 0$. Így az I_{70} intervallumban a függvény minden pozitív értéket felvesz.

A függvény menete tehát a következő (vázlatosan):

Az $f(x) = \frac{5}{4}$ egyenletnek tehát az I_0 intervallum kivételével mindegyik intervallumban van megoldása, a szigorú monotonitás miatt minden intervallumban pontosan egy. A gyökök legyenek rendre $x_1, x_2, \dots, x_{70}$. Ekkor $1 < x_1 < 2 < x_2 < 3 < \dots < 70 < x_{70}$.

Az $f(x) \geq \frac{5}{4}$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza ekkor nyilván az $(1, x_1] \cup (2, x_2] \cup \dots \cup (70, x_{70}]$ halmaz. Ezek valóban diszjunkt intervallumok, összhosszuk:

$$S = (x_1 - 1) + (x_2 - 2) + \dots + (x_{70} - 70) = (x_1 + x_2 + \dots + x_{70}) - (1 + 2 + \dots + 70)$$

Hozzuk közös nevezőre a

$$-\frac{5}{4} + f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \dots + \frac{70}{x-70} - \frac{5}{4}$$

összeget.

$$-\frac{5}{4} + f(x) = \frac{1 \cdot (x-2)(x-3) \dots (x-70) + 2 \cdot (x-1)(x-3) \dots (x-70)}{(x-1)(x-2) \dots (x-70)} + \\ + \dots + \frac{70(x-1)(x-2) \dots (x-69)}{(x-1)(x-2) \dots (x-70)} - \frac{\frac{5}{4}(x-1)(x-2) \dots (x-70)}{(x-1)(x-2) \dots (x-70)};$$

(A két sor egyetlen törtnek tekintendő.) A számláló egy 70-ed fokú polinom, főegyütthatója $a_{70} = -\frac{5}{4}$. A 69-ed fokú tag együtthatója:

$$a_{69} = 1 + 2 + \dots + 70 + \frac{5}{4}(1 + 2 + \dots + 70) = \frac{9}{4}(1 + 2 + \dots + 70).$$

Másrészt az $f(x) = \frac{5}{4}$ egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha az $f(x) - \frac{5}{4}$ tört számlálója 0, így az $x_1, x_2, \dots, x_{70}$ gyökök megegyeznek a fenti tört számlálójában szereplő polinom gyökeivel, így összegük is megegyezik. A Vieta-formula¹szerint

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{70} = \frac{-a_{69}}{a_{70}} = \frac{-\frac{9}{4}(1 + 2 + \dots + 70)}{-\frac{5}{4}} = \frac{9}{5}(1 + 2 + \dots + 70).$$

Az intervallumok összhossza tehát:

$$S = \frac{9}{5}(1 + 2 + \dots + 70) - (1 + 2 + \dots + 70) = \frac{4}{5}(1 + 2 + \dots + 70) = \\ = \frac{4}{5} \cdot 71 \cdot 70 \cdot \frac{1}{2} = 2 \cdot 71 \cdot 14 = 1988,$$

és ezt kellett bizonyítani.

Drasny Gábor (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o. t.)

5. feladat. A derékszögű ABC háromszög A csúcsából a BC átfogóhoz vezető magasságvonal talppontja D . Az ABD és ACD háromszögek beírt köreinek középpontját összekötő egyenes az AB , ill. AC befogókat K -ban, ill. L -ben metszi. Jelölje S , ill. T az ABC , ill. AKL háromszög területét. Bizonyítsuk be, hogy $S \geq 2T$.

(Görögország)

Megoldás. Legyen a beírt körök középpontja O_1 , ill. O_2 (lásd ábra).

1988-10-296-1.eps

Az ábra azt a sejtést sugallja, hogy az AKL egyenlő szárú derékszögű háromszög. (A versenyen úgy emlékeztem, mintha ez éppen egy KÖMAL feladat lett volna, noha csak ehhez hasonló volt a Gy. 2395., 37. évf. 7. szám, 310. o.). Semmi elképzelésem nem volt, hogy ha be tudnám ezt bizonyítani, akkor miért segítene, de más nem jutott eszembe, így megpróbáltam igazolni. Azaz feltettem, hogy $AK = AL$. Ebből $\angle ALO_2 = 45^\circ = \angle O_2DC$, ekkor (és csak ekkor!) $DCLO_2$ húrnégyszög! $DCLO_2$ húrnégyszög pl. akkor, ha $\angle LCD = \angle O_1O_2D$! Ennek igazolásához pedig csak azt kell

¹ Legyen az $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ komplex együtthatós polinom gyöktényezős alakja

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n);$$

az együtthatók összehasonlítása alapján adódó összefüggések:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n &= -a_1, \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \dots + \alpha_1\alpha_n + \alpha_2\alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1}\alpha_n &= a_2, \\ &\vdots \\ \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n &= (-1)^n a_n. \end{aligned}$$

Ezeket nevezzük Viéta-formuláknak.

észrevenni, hogy az a D körüli $+90^\circ$ -os forgatványújtás, amely az ADC háromszöget a BDA háromszögbe viszi, nyilván O_2 -nek O_1 -et felelteti meg. O_1O_2D háromszög derékszögű, és a befogók aránya egyenlő az ADC háromszög befogóinak arányával, így ezek hasonlóak. Kapjuk tehát, hogy $O_1O_2D \triangleleft = ACD \triangleleft$. Ezzel beláttam, hogy $ALK \triangleleft = AKL \triangleleft = 45^\circ$. Ezek után AO_2 és AO_1 szögfelező voltának kihasználásával az $AK = AD = AL$ egyenlőséget kaptam. (Ezt rövidebben lehet igazolni, ugyanis elegendő, ha csak az $ALO_2 \triangleleft = ADO_2 \triangleleft$ egyenlőséget vesszük észre.)

A megoldást ezek után borzasztóan el lehet bonyolítani, ahogy én is tettem. Kitértem ugyanis arra, hogy $KO_1 = O_1D$, és $DO_2 = O_2L$, így KL hossza épp a DO_1O_2 háromszög kerülete. Ezek után – észrevéve, hogy a DO_1O_2 háromszög az eredeti ABC háromszöghöz is hasonló – felírtam DO_1O_2 és ABC hasonlóságának arányát, végül ABC háromszög oldalaival kifejeztem KL hosszát, s mindebből számoltam ki T -t. Az $S \geq 2T$ egyenlőtlenség igazolása ezek után igazán egyszerű volt. (A koordinátornak állítólag nagyon tetszett a $DO_1O_2 \triangle \sim ABC \triangle$ eredmény, lévén hogy ennek a feladathoz nem sok köze van.)

Nézzük most „a megoldást”! Betűzzük az oldalakat az ábra szerint. AD hossza ekkor nem más, mint $\frac{cb}{a}$. (Ez a kétszeres terület kétféle felírásából adódik: $bc = a \cdot AD$.) T -re ezek után a

$$T = \frac{c^2 b^2}{2a^2}$$

eredményt kapjuk. $S \geq 2T$ így írható:

$$2 \cdot \frac{c^2 b^2}{2a^2} \leq \frac{1}{2} bc.$$

Rendezés és $a^2 = b^2 + c^2$ (Pitagorasz tétele) helyettesítés után:

$$2bc \leq b^2 + c^2$$

Ez utóbbi pedig $(b - c)^2 \geq 0$ -val ekvivalens.

Sustik Mátyás (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., III. o. t.)

6. feladat. Legyenek a és b olyan pozitív egészek, amelyekre $ab + 1$ osztója $a^2 + b^2$ -nek. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$ egy egész szám négyzete.

(NSZK)

I. megoldás. A következő megoldást sajnos nem a versenyen, hanem utána, este találtam. Ekkor már tudtam azt, hogy a végtelen leszállás elvével kijön a feladat. Erre a módszerre igazság szerint magamtól is gondolhattam volna, hiszen két hazai válogatóversenyen szükség volt rá.

Tegyük fel, hogy a $a \leq b$. Osszuk el b -t maradékosan a -val: $b = qa + r$ (q, r egész; $0 \leq r < a$). Ekkor

$$\begin{aligned} ab + 1 &= qa^2 + ra + 1, \text{ és} \\ a^2 + b^2 &= a^2 + q^2 a^2 + 2ar + r^2. \end{aligned}$$

A feltétel szerint $ab + 1 \mid a^2 + b^2$. Legyen a hányados k , azaz

$$k(qa^2 + ra + 1) = a^2 + q^2 a^2 + 2ar + r^2.$$

Másrészt:

$$q(qa^2 + ra + 1) = q^2 a^2 + qar + q.$$

A felső egyenletből az alsót kivonva:

$$(1) \quad (k - q)(qa^2 + ra + 1) = a^2 + qra + r^2 - q.$$

Most két esetet különböztetünk meg:

- I. $r = 0$ (azaz $a \mid b$),
- II. $r \neq 0$ (azaz $a \nmid b$).

Mind a két esetben (1) jobb oldalát fogjuk alulról és felülről úgy megbecsülni, hogy ennek, mint $(qa^2 + ra + 1)$ többszörösének, már csak egy lehetséges értéke marad.

I. eset. $r = 0$. (1) most így alakul:

$$(k - q)(qa^2 + 1) = a^2 - q.$$

Könnyen látható, hogy:

$$-(qa^2 + 1) < a^2 - q < qa^2 + 1,$$

tehát

$$a^2 - q = 0, \text{ és } k - q = 0.$$

Ez utóbbiakból: $k = a^2$, azaz valóban négyzetszám.

Látható az is, hogy az $a \mid b$ esetben csak a $b = a^3$ lehetséges, és az a, a^3 számpár kielégíti a feltételt.

II. eset. $r \neq 0$. Megmutatjuk, hogy ekkor:

$$0 < a^2 + qra + r^2 - q < 2(qa^2 + ra + 1).$$

A bal oldali egyenlőtlenség abból következik, hogy $a^2 + r^2 > 0$, és $qra - q \geq 0$. (Itt használjuk ki, hogy $r > 0$.) A jobb oldali céljára:

$$\begin{aligned} 2qa^2 &> a^2 + qra, & (r < a) \\ 2ra &> r^2, \\ 2 &> -q, \end{aligned}$$

ezeket összegezve megkapjuk a jobb oldali egyenlőtlenséget, és így (1)-ben csak

$$qa^2 + ra + 1 = a^2 + qra + r^2 - q \quad \text{és} \quad k - q = 1$$

lehetséges. Átrendezve:

$$(2) \quad a^2 + (a - r)^2 = (q + 1)(a(a - r) + 1).$$

$r < a$ miatt $a - r > 0$, így a és $(a - r)$ is pozitív egész. Az a, b számokból kiindulva találtunk egy másik számpárt, a -t és $(a - r)$ -et, amelyre

$$\frac{a^2 + b^2}{ab + 1} = \frac{(a - r)^2 + a^2}{(a - r)a + 1},$$

és ebben az új számpárban a számok minimuma, $(a - r)$ kisebb, mint az eredeti számpárban (a). Ha most $a - r \mid a$, akkor az I. eset szerint k négyzetszám. Ha pedig $a - r \nmid a$, akkor a II. eset szerint tovább tudjuk csökkenteni a minimumot. Az eljárást folytatva előbb-utóbb az I. esethez kell eljutnunk, ha előbb nem, akkor, amikor a két szám minimuma 1 lesz.

Ezzel beláttuk, hogy k csak négyzetszám lehet.

Nézzük még meg, milyen számpárok elégítik ki a feladat feltételeit! Figyelembe véve, hogy a II. pont eljárásával előbb-utóbb minden megoldásból egy (a, a^3) típusú megoldáshoz jutunk, az eljárást (a II. esetbelit) megfordítva kapjuk, hogy a megoldások az

$$a_1 = a, \quad a_2 = a^3, \quad a_{n+2} = a^2 a_{n+1} - a_n$$

típusú sorozatok szomszédos elemeiből álló számpárok.

Bíró András (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., III. o. t.)

A 6. feladat több szempontból is a legnehezebbnek bizonyult a versenyen. A magyar csapat például mindössze egyetlen pontot szerzett ezen a feladaton. Ennél talán többet mond, hogy az olimpiai bizottság tagjai közül – ez a bizottság hat kiváló ausztrál matematikusból állt, és ők választották ki a részt vevő országok javaslataiból azt a 31 feladatot, amelyik a nemzetközi zsűri elé került – senki sem tudta megoldani.

Hosszas vita után végül kitűzték. Sokan fogadtak arra, hogy nem, vagy alig lesz jó megoldás, és majd mindenki veszített. Végül 11 (!) versenyző oldotta meg helyesen a feladatot. A szerzők mindegyike így vagy úgy a végtelen leszállás módszerével jutott el a megoldáshoz. Az alábbiakban a bolgár *Emanuel Atanaszov* különdíjas megoldását ismertetjük, aki talán a legegészségtelenebb nyúlt a problémához.

II. megoldás. Jelöljük a hányados értékét K -val és rendezzük át a feltételt. Így az

$$(1) \quad a^2 - Kab + b^2 = K$$

összefüggéshez jutunk. Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz, a K nem négyzetszám, és tekintsük az

$$(2) \quad x^2 - Kxy + y^2 = K$$

kétismeretlenes diofantoszi egyenletet, amelynek feltételünk szerint létezik pozitív egész $(a; b)$ számokból álló megoldása.

Vegyük észre, hogy (2)-nek nem lehetnek ellenkező előjelű megoldásai, hiszen ekkor a bal oldalon

$$-Kxy > K \text{ és } x^2 - y^2 > 0.$$

Olyan megoldása sincs a (2) egyenletnek, ahol az egyik szám 0 volna, hisz ekkor a bal oldal értéke négyzetszám. (Lényegében itt használjuk fel az indirekt föltevést!)

Tekintsük most a (2) egyenletnek azt a pozitív (A, B) megoldását, amelyre a két szám közül a nem nagyobb – legyen ez B – *minimális*. Ilyen létezik és az előbbiek szerint $A \geq B > 0$.

A (2)-ben y helyére B -t helyettesítve az immár egyismeretlenes

$$(3) \quad x^2 - KBx + B^2 - K = 0$$

egyenletet kapjuk, amelynek tehát az A megoldása. A másodfokú (3) egyenlet másik, A' gyökére

$$A + A' = KB,$$

tehát A' is egész.

Az (A', B) számpár is megoldása (2)-nek, a B pozitív, így az A' is az. A gyökök és együtthatók közti másik összefüggésben a gyökök szorzata pozitív:

$$A'A = B^2 - K > 0, \text{ ahonnan}$$

$$0 < A'A < B^2, \text{ vagyis}$$

$$A \geq B \text{ miatt } A' < B!$$

Abból a feltevésből kiindulva, hogy a K nem négyzetszám, találtunk a (2) egyenletre egy másik megoldást, az $(A'B)$ számpárt, ahol $0 < A' < B$, ellentétben az (A, B) megoldásra előírt kikötésünkkel. Ez azt jelenti, hogy a K valóban négyzetszám.