

Sokszor hasznos lehet, ha irracionális számokat hozzájuk közel eső racionális számokkal helyettesítünk. Most egy olyan módszerrel ismerkedhetünk meg, melynek segítségével teljes általánosságban megoldhatjuk a 2425. gyakorlatot.¹

Közismert, hogy az irracionális számok tetszőleges pontossággal közelíthetők racionális számokkal: adott nevezőjű törtek között ugyanis van olyan, amelyik a nevező reciprokának a felénél közelebb van a vizsgált irracionális számhoz, és ez az eltérés bármilyen kicsi lehet, ha a nevező elég nagy.

Vajon van-e ennél jobb módszer, léteznek-e olyan közelítő törtek is, amelyek a nevezőjük reciprokánál kisebb nagyságrendben térnek el a vizsgált számtól? Másképpen szólva lehet-e a valós számokat már viszonylag kis nevezőjű törtekkel is viszonylag jól közelíteni? A $\sqrt{3} = 1,73205\dots$ számot például a két tizedesre pontos $1,73 = 173/100$ értéknél jobban közelíti meg a lényegesen kisebb nevezőjű $26/15 = 1,733$, és még sokkal jobban a 100-nál még mindig kisebb nevezőjű $97/56 = 1,73214\dots$.

Az $\frac{1}{2}$ viszont bármely tőle különböző p/q törttől legalább $\frac{1}{2q}$ távolságra van, és ez általában is igaz: a racionális számokat ilyen értelemben nem lehet jól közelíteni.

1. Tétel: Ha egy $\frac{a}{b}$ racionális számot tőle különböző, q nevezőjű racionális törtekkel közelítünk, akkor a hiba mindig legalább $\frac{1}{bq}$.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $\frac{a}{b} \neq \frac{p}{q}$, $bq > 0$. Ekkor

$$\left| \frac{a}{b} - \frac{p}{q} \right| = \frac{|aq - bp|}{bq} \geq \frac{1}{bq},$$

mert $aq - bp$ 0-tól különböző egész szám.

Egészen más a helyzet az irracionális számok esetében :

2. Tétel: Tetszőleges α irracionális számhoz végtelen sok $\frac{p}{q}$ alakú racionális szám található ($q > 1$), melyre $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$, a közelítés hibája tehát kisebb, mint a nevező reciprokának a négyzete.

(Feladat: Bizonyítsuk be, hogy az ilyen törtek mind különböző nevezőjűek.)

Bizonyítás: Legyen N egy olyan pozitív egész szám, hogy $\frac{1}{N}$ már kisebb, mint α -nak a hozzá legközelebb eső egész számtól való eltérése. Tekintsük a következő $N + 1$ darab 1-nél kisebb, nem negatív számot:

$$\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \dots, \{N\alpha\}, \{(N+1)\alpha\}.$$

Ezek egyike sem 0 és semelyik kettő nem egyenlő, különben az α racionális volna. Van tehát köztük kettő, $\{i\alpha\}$ és $\{j\alpha\}$, melyek eltérése $\frac{1}{N}$ -nél kisebb:

$$0 < \{i\alpha\} - \{j\alpha\} < \frac{1}{N},$$

különben nem férne el az $N + 1$ darab szám a $(0, 1)$ intervallumban. Ekkor a törtrész definíciója szerint

$$0 < i\alpha - [i\alpha] - j\alpha + [j\alpha] < \frac{1}{N}, \quad \text{azaz}$$

$$[i\alpha] - [j\alpha] < (i - j)\alpha < [i\alpha] - [j\alpha] + \frac{1}{N}.$$

Ha most $i > j$, akkor $q = i - j$, $p = [i\alpha] - [j\alpha]$ választással:

$$p < q\alpha < p + \frac{1}{N}, \quad \text{ahonnan}$$

$$\frac{p}{q} < \alpha < \frac{p}{q} + \frac{1}{Nq} \quad \text{és így valóban}$$

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{Nq} \leq \frac{1}{q^2},$$

ugyanis $1 \leq i$, $j \leq N + 1$ miatt $q = i - j \leq N$. Ha pedig $i < j$, akkor $q = j - i$, $p = [j\alpha] - [i\alpha]$ választással jutunk ugyanerre az eredményre.

¹ A megoldás a KÖMAL 1988/3. számának 114. oldalán olvasható.

A q nagyobb 1-nél, hiszen egyébként $|\alpha - p| < \frac{1}{N}$ volna, ellentétben N választásával. Egy megfelelő $\frac{p}{q}$ törtet tehát már találtunk. Ha most egy olyan N_1 -et választunk, melyre $\frac{1}{N_1} < \left| \alpha - \frac{p}{q} \right|$, akkor a fenti eljárást N helyett N_1 -gyel elvégezve olyan $\frac{p_1}{q_1}$ törthöz jutunk, melyre

$$\left| \alpha - \frac{p_1}{q_1} \right| < \frac{1}{q_1^2}, \quad \text{továbbá} \quad \left| \alpha - \frac{p_1}{q_1} \right| < \frac{1}{N_1 q_1} < \frac{1}{N_1},$$

és ezért $\frac{p}{q}$ és $\frac{p_1}{q_1}$ különbözők. Ha most ezt az eljárást folytatjuk, tehát $\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}$ előállításához úgy választjuk N_{i+1} -et, hogy

$$\frac{1}{N_{i+1}} < \left| \alpha - \frac{p_i}{q_i} \right|$$

legyen, akkor végtelen sok különböző $\frac{p_i}{q_i}$ törtet kapunk, melyekre

$$q_i > 1 \quad \text{és} \quad \left| \alpha - \frac{p_i}{q_i} \right| < \frac{1}{q_i^2}.$$

Még egy lépéssel továbbmehetünk, és megkérdezhetjük, mi a helyzet, ha egyszerre több számot szeretnénk azonos nevezőjű törttekkel közelíteni. Az előző bizonyítás módszerét magasabb dimenziókban általánosítva (pl. két irracionális szám, α és β esetén a $(0, 1) \times (0, 1)$ egységnégyszet $(\{i\alpha\}, \{j\beta\})$ koordinátájú pontjait tekintve) a következő eredményre juthatunk:

3. Tétel: *Legyenek $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ tetszőleges irracionális számok. Ekkor található végtelen sok q pozitív egész, és minden egyes q -hoz a megfelelő $p_1, \dots, p_m$ egész számok úgy, hogy*

$$\left| \alpha_i - \frac{p_i}{q} \right| < \varepsilon_q = \frac{1}{q^{1+\frac{1}{m}}}$$

teljesül **egyszerre** $i = 1, 2, \dots, m$ esetén.

Ez azt jelenti, hogy a „szimultán” közelítés hibája még mindig kicsi a nevező reciprokához képest: $\varepsilon_q \cdot q \rightarrow 0$, ha $q \rightarrow +\infty$.

*

A 3. Tétel ismeretében már bátran hozzáfoghatunk a 2425. gyakorlat következő általánosításához:

4. Tétel: *Az $a_1, a_2, \dots, a_{2n+1}$ valós számokról tudjuk, hogy bárhogyan is hagyunk el közülük egyet, a maradék $2n$ szám két n elemű halmazra bontható úgy, hogy a két halmazban egyenlő az elemek összege. Ekkor a számok mind egyenlők.*

Bizonyítás: Ha az a_i számok egészek, akkor csak a 2425. gyakorlat megoldására kell hivatkoznunk. Ebből könnyen nyerhetjük az állítást, ha az a_i számok mind racionálisak, ugyanis a számokat a nevezők legkisebb közös többszörösével szorozva a feltétel továbbra is fennáll, számaink pedig egészek lesznek.

Mit tehetünk azonban akkor, ha a számok között irracionálisak is akadnak? Tegyük fel először, hogy az a_i számok mindegyike irracionális. Stratégiánk ekkor a következő lesz: az a_i számokat alkalmas racionális számokkal közelítve a 3. Tételből ezeknek a racionális számoknak az egyenlőségét kapjuk, ebből pedig maguknak az a_i számoknak az egyenlőségét is beláthatjuk.

Legyen tehát a q egy, a 3. Tétel biztosította nevező, $r_i = \frac{p_i}{q}$ pedig a tételbeli a_i racionális közelítése, melyre tehát a 3. Tétel szerint

$$(*) \quad |a_i - r_i| < \varepsilon_q = \frac{1}{q^{1+\frac{1}{2n+1}}}, \quad i = 1, 2, \dots, 2n+1.$$

Megmutatjuk, hogy ha q elég nagy – a 3. Tétel biztosítja, hogy ez lehetséges –, akkor $(*)$ -ból következik, hogy az r_i racionális számokra is teljesülnek a 4. Tétel feltételei, és így azok egyenlők. Ha ezután R_q jelöli közös értéküket, akkor $(*)$ szerint

$$|a_i - R_q| < \varepsilon_q, \quad i = 1, 2, \dots, 2n+1$$

és így

$$|a_i - a_j| \leq |a_i - R_q| + |a_j - R_q| < 2\varepsilon_q,$$

amiből valóban a 4. Tétel állítása, $a_i = a_j$ adódik, hiszen ε_q bármilyen kicsi lehet, ha q elég nagy.

Be kell még látnunk, hogy az r_i racionális közelítésekre valóban teljesülnek a 4. Tétel feltételei, ha a q elég nagy. Válasszunk ki egyet az r_i számok közül, és legyen a megfelelő a_i elhagyása után kapott két egyenlő összegű csoport

$$a'_1, a'_2, \dots, a'_n \quad \text{és} \quad a'_{n+1}, a'_{n+2}, \dots, a'_{2n}.$$

(Ezek az $a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_{2n+1}$ számok valamilyen sorrendben.) Megmutatjuk, hogy ha q elég nagy, akkor a megfelelő

$$(r'_1 + r'_2 + \dots + r'_n) - (r'_{n+1} + r'_{n+2} + \dots + r'_{2n}) = r_q$$

különbség abszolút értéke kisebb, mint $1/q$. Mivel r_q egy q nevezőjű tört – hisz ilyenek összegének különbsége – ez csak az $r_q = 0$ esetben lehetséges, vagyis elegendően nagy q -ra az r_i közelítésekre valóban teljesülnek a 4. Tétel feltételei. Tekintsük ehhez r_q alábbi alakját:

$$r_q = (a'_1 + a'_2 + \dots + a'_n) - (a'_{n+1} + \dots + a'_{2n}) + (r'_1 - a'_1) + (r'_2 - a'_2) + \dots + (r'_n - a'_n) + (a'_{n+1} - r'_{n+1}) + \dots + (a'_{2n} - r'_{2n}).$$

Tudjuk, hogy

$$(a'_1 + a'_2 + \dots + a'_n) - (a'_{n+1} + a'_{n+2} + \dots + a'_{2n}) = 0,$$

így

$$r_q = \sum_{i=1}^n (r'_i - a'_i) + \sum_{i=n+1}^{2n} (a'_i - r'_i).$$

Mivel összeg abszolút értéke kisebb, vagy egyenlő, mint a tagok abszolút értékének összege, innen (*) felhasználásával

$$|r_q| \leq \sum_{i=1}^{2n} |a'_i - r'_i| < 2n \cdot \varepsilon_q$$

adódik.

Láttuk, hogy a 3. Tétel biztosítja, hogy még $\varepsilon_q \cdot q$ is a 0-hoz tart, és mivel $2n$ adott szám – a 2425. gyakorlatban pl. 10 –, ezért ha q elég nagy, akkor $2n \cdot q \cdot \varepsilon_q < 1$, azaz $2n \cdot \varepsilon_q < \frac{1}{q}$, és ezt akartuk bizonyítani.

Ezzel teljes egészében igazoltuk a 4. Tételt arra az esetre, ha az $a_1, a_2, \dots, a_{2n+1}$ számok mindegyike irracionális. Látnunk kell, hogy a bizonyítás lényegesen kihasználja, hogy a számok között nincsen racionális, ellenkező esetben ugyanis a (*)-beli becslés hibája q -val szorozva már nem volna tetszőlegesen kicsivé tehető.

Mit tegyünk tehát, ha a számok között racionális és irracionális számok is vannak. Nos, a 2425. gyakorlat megoldásában láttuk, hogy ha az a_i számok mindegyikéhez hozzáadjuk ugyanazt az α számot, akkor az így kapott b_i számokra ugyanaz a feltétel teljesül, mint az a_i számokra. Ha most α -t meg tudjuk úgy választani, hogy a b_i számok már mind irracionálisak legyenek, akkor az eddigiek alapján ez a b_i számok egyenlőségét jelentené, ami természetesen maga után vonná az a_i számok egyenlőségét is.

Éppen ilyen α létezését biztosítja az alábbi, önmagában is érdekes

Lemma: Ha $a_1, a_2, \dots, a_m$ tetszőleges valós számok, akkor létezik olyan α valós szám, hogy az

$$a_1 + \alpha, a_2 + \alpha, \dots, a_m + \alpha$$

összegek mindegyike irracionális.

Bizonyítás: Ha minden a_i racionális, akkor bármely irracionális α megfelelő. Föltehető tehát, hogy pl. a_i irracionális. Azt állítjuk, hogy az

$$\alpha_1 = a_1, \alpha_2 = 2a_1, \dots, \alpha_m = m \cdot a_1, \alpha_{m+1} = (m+1)a_1$$

számok között van megfelelő. Ha nem, akkor a skatulya-elv szerint van két különböző α_j , hogy ugyanarra az a_i -re racionális $a_i + \alpha_{j_1}$ és $a_i + \alpha_{j_2}$. Ekkor e két szám különbsége, $\alpha_{j_1} - \alpha_{j_2} = (j_1 - j_2)a_1$ is racionális, ami nem lehet, hisz a_i irracionális, $j_1 - j_2$ pedig 0-tól különböző egész.

Ezzel a lemmát és egyúttal a 4. Tételt is teljes egészében igazoltuk.