

1. Két tört számlálója egyaránt 3, nevezőjük összege 13. A két tört összege $\frac{39}{40}$. Melyik ez a két tört?

2. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} 7^{x+1} \cdot 2^y &= 4; \\ \frac{1}{x-1} - \frac{1}{y} &= \frac{4}{y(x-1)}. \end{aligned}$$

3. Egy szimmetrikus trapéz átlói merőlegesek egymásra, és két olyan részre osztják egymást, amelyeknek aránya 1 : 7. Mekkora a trapéz területe, ha kerülete $180\sqrt{2}$?

4. Két, egymást kívülről érintő kör sugara R , illetve r , és $R > r$. Adja meg a két kör sugarainak függvényeként a két kör közös belső érintőjének a közös külső érintők közé eső szakaszát!

5. Egy mértani sorozat első, harmadik és ötödik elemének összege 182, a második és negyedik elem összege a hányados 20-szorosa. Írja fel a sorozat első öt elemét!

[A]¹ 6. Legyen ABC és DEF tetszőleges két háromszög. Az ABC háromszög súlypontját jelölje S , a DEF háromszögét T . Bizonyítsa be, hogy $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = 3\overrightarrow{ST}$.

7. Oldja meg a valós számok halmazán a

$$\log_{|x-1|} x \geq 1$$

egyenlőtlenséget!

8. Van-e a síkon olyan egyenes, amelynek minden $P(x; y)$ pontja kielégíti az alábbi egyenlőtlenséget:

$$x^4 - 2x^2y + y^2 - 1 \leq 0.$$

[B] 6. Az $ABCD$ trapéz AB alapja kétszerese a vele párhuzamos CD oldalnak és az AD szárnak is; a BC szár hossza 5, az AC átlóé 12. Számítsa ki a trapéz területét!

7. Számítsa ki az alábbi egyenlőtlenségeknek $\left[\frac{\pi}{4}; \pi\right]$ intervallumba eső gyökeit:

$$a) \quad \frac{1}{\sin^2 x} \leq \frac{1}{\sin 2x - \cos^2 x}; \quad b) \quad \log_2 \sin 2x < -1.$$

8. Legyen P az ABC szabályos háromszög köré írható körnek egy pontja. Bizonyítsa be, hogy a $PA^2 + PB^2 + PC^2$ összeg állandó, és adja meg ennek az állandónak az értékét!

¹A 6–8. feladatokban az **A** jelűek a gimnáziumot végzettek számára ajánlottak, a **B** jelűek pedig a szakközépiskolát végzettek számára.