

1. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$3 \cdot \log_{1000}(x-1) + 2 \cdot \log_{1000}(x+3) - 2^{x+3} \cdot \log_{10}(x^2 + 2x - 3) = 0.$$

2. Legyen az $f : R \rightarrow R$ függvény a következő: bármely valós x értékre $f(x)$ legyen az x -nek a $[0; 2]$ zárt intervallum legtávolabbi egész értékétől való távolsága. Írja fel az f függvényt képlettel és ábrázolja!

3. Egy derékszögű háromszög átfogója c , befogói a és b . Megforgatjuk a háromszöget mindhárom oldala körül. Legyen az átfogó körüli forgatáskor keletkezett forgástest térfogata V_c , a befogók körüli forgatáskor keletkezett forgástestek térfogata V_a , V_b . Igazolja, hogy

$$\frac{1}{V_c^2} = \frac{1}{V_a^2} + \frac{1}{V_b^2}.$$

4. Milyen valós x -ek elégítik ki a következő egyenletet:

$$\sin^3 x(1 + \operatorname{ctg} x) + \cos^3 x(1 + \operatorname{tg} x) = \cos 2x.$$

5. Az $ABCD$ négyzet oldala a . Az AC átlóján felvesszük az E pontot úgy, hogy $AE : AC = 1 : 3$. A DE egyenes a négyzet köré írt kört F -ben, a CB oldal meghosszabbítását G -ben metszi. Bizonyítsa be, hogy

a) GA a kör érintője,

b) $GF \cdot GD = 2a^2$.

6. Legyen az $ABCS$ tetraéderben $SA \perp SB \perp SC \perp SA$. Hegyesszögű-e az ABC háromszög?

7. Az egész számok sorozatából valamelyik számtól kezdve minden nyolcadik számot kivesszük addig, amíg a kivett számok összege 473 lesz. Melyik számot vettük ki először és hány számot vettünk ki?

8. Határozza meg a k paraméter azon egész szám értékét, amelyre a

$$(k^2 - 1)x^2 - (2k^2 - 3k - 1)x + k^2 - 3k + 2 = 0$$

egyenlet gyökei egész számok!