

1. Bizonyítsuk be, hogy három egy pontból induló félegyenes akkor és csak akkor tartalmazhatja egy téglatest három lapátlóját, ha a félegyenesek páronként hegyesszöget zárnak be és ezek összege 180° .

1. megoldás. Először is megmutatjuk, hogy a félegyenesek közös pontja csak a téglatest valamelyik csúcsa lehet. Mivel egy lapnak két átlója van, a három átló közül legalább kettőnek különböző lapokon kell lennie. Két ilyen átló nem lehet szemben fekvő lapokon, mert azok síkjai párhuzamosak, s így a rajtuk levő egy-egy egyenesnek nincs közös pontja. Két szomszédos lapon levő egyenesek csak a lapok metszésvonalán metszhetik egymást, két lapátló tehát csak úgy, ha egyik végpontjuk közös, vagyis a tégl. egy csúcsa. Ekkor viszont a harmadik félegyenesen levő átló csak a kérdéses csúcsban találkozó harmadik oldallapnak a csúcsból induló átlója lehet.

1987-02-051-1.eps

1. ábra

Jelöljük a téglatest csúcsait $A, B, C, D, A', B', C', D'$ -vel az 1. ábra szerint, és tekintsük az A csúcsból induló lapátlókat. Jelöljük az $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$ vektorokat $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ -vel, hosszukat a, b, c -vel. Ekkor az átlók irányába mutató vektorok:

$$\mathbf{e} = \overrightarrow{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}, \quad \mathbf{f} = \overrightarrow{AB'} = \mathbf{a} + \mathbf{c}, \quad \mathbf{g} = \overrightarrow{AD'} = \mathbf{b} + \mathbf{c}.$$

Két félegyenes akkor zár be hegyesszöget, ha az irányukba mutató vektorok skaláris szorzata pozitív. Esetünkben, mivel az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorok páronként merőlegesek egymásra,

$$\mathbf{e}\mathbf{f} = (\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{a} + \mathbf{c}) = \mathbf{a}^2 + \mathbf{a}\mathbf{c} + \mathbf{b}\mathbf{a} + \mathbf{b}\mathbf{c} = a^2 > 0,$$

tehát az AC és AB' átlók közt hegyesszög van. Hasonlóan látható be, hogy a másik két átlópár is hegyesszöget zár be.

A szögek összegének megállapításához belátjuk, hogy a három átló közötti szögek megegyeznek pl. az ACD' háromszög belső szögeivel. Ebből természetesen következik, hogy összegük 180° .

$$B'AD' \triangleleft = CD'A \triangleleft,$$

mert Pitagorasz tételéből

$$B'D'^2 = a^2 + b^2 = AC^2 \quad \text{és} \quad CD'^2 = a^2 + c^2 = AB'^2,$$

tehát az ACD' és a $D'B'A$ háromszög megfelelő oldalai egyenlők, s így a háromszögek egybevágók. Felhasználva még a

$$B'C^2 = b^2 + c^2 = AD'^2$$

egyenlőséget is, kapjuk, hogy az ACD' és CAB' háromszögek is egybevágók, amiből következik, hogy

$$ACD' \triangleleft = CAB' \triangleleft.$$

Ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

Most megmutatjuk, hogy ha α, β, γ olyan hegyesszögek, amelyek összege 180° , akkor van olyan téglatest, amelyeknek az egyik csúcsából induló lapátlók közti szögek α, β , illetve γ .

Rajzoljunk olyan háromszöget, amelyiknek a szögei α, β , illetve γ . Ilyen van, mert a szögek összege 180° . Legyen az α, β, γ szöggel szemközti oldal hossza e, f , illetve g . Ekkor egy olyan téglatest a, b, c éleire, amelyeknek három lapátlója az adott szögeket zárja be, az

$$(1) \quad a^2 + b^2 = e^2, \quad a^2 + c^2 = f^2, \quad b^2 + c^2 = g^2$$

egyenletrendszernek kell teljesülnie. Ennek megoldása :

$$a = \sqrt{(e^2 + f^2 - g^2)/2}, \quad b = \sqrt{(e^2 + g^2 - f^2)/2}, \quad c = \sqrt{(f^2 + g^2 - e^2)/2}.$$

A gyökjelek alatt pozitív számok állnak, mert a koszinusztétel szerint ezek az értékek

$$(2) \quad ef \cos \gamma, \quad eg \cos \beta, \quad fg \cos \alpha,$$

és ezek a szögek hegyes volta miatt pozitívak.

Szerkesszünk ezekkel az élhosszúságokkal $ABCD A' B' C' D'$ téglatestet. Az 1. ábra jelöléseit használva az A csúcsból induló AC, AB', AD' lapátlók hosszára ekkor rendre az (1) alatti értékek adódnak. Az átlókat vektoroknak tekintve páronkénti skaláris szorzataikra viszont a (2) alatti értékeket kapjuk, hiszen pl.

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB'} = a^2 = (e^2 + f^2 - g^2)/2 = ef \cos \gamma.$$

Itt felhasználtuk a megoldás elején végzett számítást is. Mivel a cosinus függvény 0° és 180° közt minden 1 és -1 közti értéket csak egyszer vesz fel, ez csak úgy lehet, ha a lapátlók szöge rendre γ , β és α . Ezzel a feladatot megoldottuk.

Megjegyzések. 1. A versenyzők nagy része számításon keresztül oldotta meg a feladatot, ezért választottunk elsőnek egy számításon alapuló megoldást. Akadtak olyanok is, akik a

$$\cos \left((\mathbf{e}, \mathbf{f})_{\triangleleft} + (\mathbf{f}, \mathbf{g})_{\triangleleft} + (\mathbf{e}, \mathbf{g})_{\triangleleft} \right) = -1,$$

vagy a

$$\cos \left((\mathbf{e}, \mathbf{f})_{\triangleleft} + (\mathbf{f}, \mathbf{g})_{\triangleleft} \right) = -\cos(\mathbf{g}, \mathbf{e})_{\triangleleft}$$

egyenlőség igazolásával látták be, hogy a szögek összege 180° .

2. Annak a belátására, hogy bármely 3 hegyesszöghöz, amelyeknek az összege 180° , van olyan téglatest, amelynek 3 lapátlója közti szögek éppen az adottak, azt bizonyítottuk be, hogy minden hegyesszögű háromszöghöz található a térben olyan pont, amelyiket a csúcsokkal összekötő egyenesek páronként merőlegesek. Lényegében ennek a bizonyítását kívánta az 1938. évi Eötvös verseny 3. feladata.*¹

3. A szögösszegre vonatkozó bizonyítás során azt láttuk be, hogy az $AB'CD'$ tetraéder kitérő élpárjai egyenlő hosszúak. Így az oldallapok egybevágó háromszögek. Az ilyen tetraédereket egyenlőoldalúnak nevezik. Ezek a szabályos tetraédernél kevésbé speciálisak, mégis rendelkeznek a szabályos háromszögek számos tulajdonságának a térbeli megfelelőjével.

A feladat megoldható számolás nélkül, amint a további megoldások mutatják. Nem bizonyítjuk újra, hogy a fél-egyeneseknek a téglá egy csúcsából kell indulniuk. Ennek bizonyítása egyébként nem igényelt számítást.

II. megoldás. Belátjuk, hogy a CAD' hegyesszög. Forgassuk a CAD' háromszöget CD' oldala körül a CDD' síkba; jelöljük A új helyzetét A_1 -gyel. (2. ábra).

1987-02-053-1.eps

2. ábra

D a CA_1D' háromszög belsejében lesz, ugyanis az A csúcs egy CD' -re bocsátott merőleges síkban mozog forgatás közben. Ennek a síknak az E metszéspontja a CD' egyenessel a CD' szakasz belsejében van, mert A merőleges vetülete, D , rajta van a CDD' sík és a merőleges sík metszésvonalán, az A_1E egyenesen; így DE a CDD' derékszögű háromszög D -ből húzott magassága, talppontja tehát az átfogó belsejére esik. Mivel az ADE háromszög AE átfogója nagyobb a DE befogónál, így D az A_1E szakaszon van. Ekkor azonban

$$CDE_{\triangleleft} > CA_1E_{\triangleleft} \quad \text{és} \quad EDD'_{\triangleleft} > EA_1D'_{\triangleleft},$$

mert a bal oldalon a CA_1D , ill. a DA_1D' háromszög D -nél levő külső szöge áll, a jobb oldalon viszont az A_1 csúcsnál fekvő belső szög. A megfelelő oldalakat összeadva :

$$90^\circ = CDE_{\triangleleft} + EDD'_{\triangleleft} > CA_1E_{\triangleleft} + EA_1D'_{\triangleleft} = CA_1D'_{\triangleleft},$$

és ezt akartuk bizonyítani. Hasonlóan látható be, hogy a másik két átlópár is hegyesszöget zár be.

Az $AB'CD'$ tetraéder egyenlőoldalú, mert az AB' , CD' ; $B'C$, $D'A$; AC , $B'D'$ szembenfekvő élpárok a téglá két-két szembenfekvő lapjának egy-egy átlója ; ezek a lapok egybevágó téglalapok és a téglalap két átlója egyenlő hosszú.

Ekkor egybevágók a következő háromszögek : ACD' , CAB' , $D'B'A$ és így

$$CAB'_{\triangleleft} = ACD'_{\triangleleft}, \quad B'AD'_{\triangleleft} = CD'A_{\triangleleft}.$$

A jobb oldali szögek az ACD' háromszög belső szögei, tehát a három lapátló közti szögek összege :

$$B'AC_{\triangleleft} + CAD'_{\triangleleft} + D'AB'_{\triangleleft} = D'AC_{\triangleleft} + CAD'_{\triangleleft} + AD'C_{\triangleleft} = 180^\circ.$$

Ezzel beláttuk a feladatban szereplő feltételek szükséges voltát.

1987-02-054-1.eps

3. ábra

¹Lásd: Hajós Gy. –Neukomm Gy. – Surányi J. : Matematikai versenytételek, II. köt., 2. kiad. (Tankönyvkiadó, Budapest, 1965.) 65 - 66. old.

Teljesüljön az α , β , γ hegyesszögekre az $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ összefüggés. Rajzoljunk $A_1A_2A_3$ háromszöget, amelyeknek ekkorák a szögei. Jelöljük az A_2A_3 , A_3A_1 , A_1A_2 oldalak felezőpontját rendre B' , C , D' -vel (3. ábra). (Így maradunk összhangban az eddigi jelölésekkel.) A CA_1D' háromszöget a CD' oldala körül, a $B'A_2D'$ háromszöget pedig a $B'D'$ oldala körül forgatva az A_1 és A_2 pontok találkoznak a tér egy A pontjában. Az A_1 pont vetülete ugyanis az A_1 -ből CD' -re állított merőlegesen mozog. Ez merőleges A_2A_3 -ra is, tehát az $A_1A_2A_3$ háromszög magasságvonala. Metszéspontját CD' -vel jelöljük E -vel. Ez felezi a magasságot. Hasonlóan A_2 vetülete a $B'D'$ -re merőleges egyenesen mozog a forgatás során. Ez a háromszög A_2 -ből húzott magasságvonala, a háromszögbe eső szakaszát a $B'D$ -vel való F metszéspont felezi.

A két egyenes M metszéspontja a háromszög magasságpontja. Ez a háromszög belsejében van, mert a háromszög hegyesszögű. Az említett felezési tulajdonságok miatt

$$A_1E > EM \quad \text{és} \quad A_2F > FM.$$

Ennek folytán az a kör, amelyiken A_2 mozog, az M pontban a háromszög síkjára merőlegesen álló egyenest metszi. A metszéspont legyen A . Erre

$$AD' = A_1D' = D'A_2,$$

így ugyanebbe a pontba jut a forgatás közben A_2 is. Az A pontra teljesülnek az

$$AC = CA_1 = CA_3 \quad \text{és} \quad AB' = B'A_2 = B'A_3$$

egyenlőségek, tehát az $AB'C$ háromszög egybevágó $A_3B'C$ -vel. Az AB' , AC és AD' félegyenesek közti szögek tehát az adott hegyesszögekkel egyenlők, az $AB'CD'$ tetraéder pedig egyenlő oldalú.

1987-02-054-2.eps

4. ábra

Olyan téglatestet kell még szerkesztenünk, amelyeknek az A csúcsból induló élek lapátlói. Húzzunk AB' felezőpontján át olyan $D'C$ -vel egyenlő és egy irányban párhuzamos $A'B$ szakaszt, amelyet a pont szintén felez, és hasonlóan CD' felezőpontján át $B'A$ -val egyenlő, párhuzamos és egyirányú $C'D$ szakaszt, amelyet a pont szintén felez (4. ábra). Ekkor $AA'B'B$ és $CC'D'D$ párhuzamos oldalú és egybevágó téglalapok, mert átlóik egyenlők és felezik egymást, tehát $ABCD A'B'C'D'$ paralelepipedon. Ekkor azonban téglalapok a többi lapjai is, mert

$$BD = B'D' = AC = A'C' \quad \text{és} \quad BC' = AD' = CB' = DA',$$

mivel a tetraéder szemben fekvő élei egyenlők. A paralelepipedon tehát téglatest. Ezzel a feladatot megoldottuk.

Megjegyzések. 1. A megoldásból látható, hogy tetszés szerinti $AB'CD'$ tetraéderhez megszerkeszthető az $ABCD A'B'C'D'$ paralelepipedon, a tetraéder ún. bennfoglaló paralelepipedonja. Erre vonatkozóan lényegében azt láttuk be, hogy a bennfoglaló paralelepipedon akkor és csak akkor téglatest, ha a tetraéder egyenlőoldalú. Hozzátehetjük – ez könnyen látható –, hogy akkor és csak akkor kocka, ha a tetraéder szabályos.

2. Az előző megjegyzésnek és a feladat állításának az összevetéséből azt is kapjuk, hogy az egyenlőoldalú tetraéder élei közti szögek hegyesszögek. Nem igaz viszont a megfelelő állítás a lapok közti szögekre. A fenti megoldásban felhasználtuk, hogy az M magasságpont az $A_1A_2A_3$ háromszög belsejében van, mert az hegyesszögű. Nem kell azonban a $B'CD'$ középháromszögben lennie. Ha pl. a $D'A_2B'$ háromszögbe esik (5. ábra), akkor az $AB'D'$ és $B'CD'$ lapok szöge tompaszög.

1987-02-055-1.eps

5. ábra

III. megoldás. Fektessünk az $ABCD A'B'C'D'$ téglatest A csúcsán át az AC lapátlóra merőleges síkot (6. ábra). Ennek a téglával az AA' éle közös, a test a sík egyik oldalán fekszik. Ennélfogva az AB' és AD' félegyenesek hegyesszöget zárnak be a síkra merőleges AC félegyenessel. Hasonlóan látható be, hogy az utoljára említett két félegyenes is hegyesszöget zár be.

1987-02-055-2.eps

6. ábra

1987-02-055-2.eps

7. ábra

Tükrözzük a téglatestet az $AA'D'D$ és $BB'C'C$ lapok középpontján átmenő tengelyre (7. ábra). Ekkor a $B'AD' \triangleleft$ és a $CD'A \triangleleft$ egymásba megy át, tehát ezek egyenlők. Az $ABCD$ és $A'B'C'D'$ lapokra merőleges tengelyen át tükrözve kapjuk a $D'CA \triangleleft$ és $B'AC \triangleleft$ egyenlőségét. Az AB' , AC , AD' lapátlók közti szögek tehát az ACD' háromszög belső szögeivel egyenlők, s így összegük 180° . Ezzel a feltételek szükséges voltát beláttuk.

Legyen most α , β , γ három hegyesszög, amelyek összege 180° . Rajzoljunk a síkban γ szöget bezáró e és f félegyenest, majd egy α nyílásszögű körkúpot e tengellyel és egy β nyílásszögűt f tengellyel. Ezek metszik egymást. Legyen ugyanis a kúpok metszészvonala e és f síkjával g_1 , h_1 és g_2 , h_2 , akkor ezek közül kettő, mondjuk h_1 és h_2 , egymás meghosszabbítása, mert a szögek összege 180° (8. ábra). A g_1 , h_1 és g_2 , h_2 , félegyeneseink közti szögtartomány nyílásszöge 2α , ill. 2β . Mivel

$$2\alpha + 2\beta = 360^\circ - 2\gamma > 180^\circ,$$

így a két szögtartomány átfedi egymást. Közös részük mindkét kúpban benne van, azok tehát valóban metszik egymást. Egyik metszészvonalukat g -vel jelölve, az e , f , g félegyeneseink közti szögek γ , β és α .

1987-02-056-1.eps

8. ábra

1987-02-056-2.eps

9. ábra

Jelöljük a félegyeneseink közös kezdőpontját O -val. Legyen g egy ettől különböző pontja D_1 . Húzzuk meg D_1 -ből az OD_1 -gyel e és g síkjában ($f, g \triangleleft (= \beta)$) és f és g síkjában ($e, g \triangleleft (= \alpha)$) szöget bezáró egyenest (9. ábra). Az előbbinek e -vel, ill. az utóbbinak f -fel való metszéspontja legyen B_1 , ill. C . Ekkor az OB_1D_1 és a D_1CO háromszög egybevágó, mert a közös $OD_1 = D_1O$ oldalukon levő szögek egyenlők. Így $OB_1 = D_1C$ és $B_1D_1 = CO$. Ekkor viszont a B_1OC háromszög is egybevágó az előbbiekkkel, mert

$$B_1OC \triangleleft = \gamma = OB_1D_1 \triangleleft,$$

és a megfelelő szögszárakon levő oldalak egyenlők. Így viszont a CD_1B_1 három-szög is egybevágó az előbbiekkkel, mert az utolsó egybevágóságból következik, hogy $CB_1 = OD_1$ és így pl. az OB_1D_1 háromszöggel megfelelő oldalaik egyenlők. Az OB_1CD_1 tetraéder tehát egyenlőoldali.

Jelöljük a CO , CB_1 , CD_1 , OB_1 , B_1D_1 , D_1O élek felezőpontját rendre A , B' , D' , U , V , W -vel. Ekkor A , B' , V , W egy rombusz csúcsai, mert AB' és WV párhuzamos OB_1 -gyel és fele akkora, miután az OCB_1 , ill. OD_1B_1 háromszög középvonala. Így egy síkban vannak és egy paralelogramma csúcsai. Ezen felül AW a COD_1 háromszög középvonala, tehát félakkora, mint CD_1 , ami meg OB_1 -gyel egyenlő. Így a paralelogramma valóban rombusz, tehát AV és $B'W$ átlói merőlegesek és felezik egymást. Hasonlóan látható, hogy $AUVD'$ és $B'D'WU$ is rombusz, így AV , $B'W$ és $D'U$ páronként merőlegesek és felezőpontjuk közös; jelöljük ezt A' -vel.

Az A' pontból az $AB'D'$ háromszög oldalai derékszögben látszanak. Legyen B , C' , ill. D az a pont, amire $AA'B'B$, $A'B'C'D'$, ill. $AA'D'D$ paralelogramma. Mivel ezek a paralelogrammák téglalapok, az $ABCD A'B'C'D'$ paralelepipedon téglatest, Ennek AB' , AC , AD' lapátlói rendre OB_1 , OC , OD_1 -gyel párhuzamosak, így a köztük levő szögek az adott szögek. Ezzel a feladatot megoldottuk.

Megjegyzések. 1. Azok a versenyzők, akik számolásmentes utat követtek a feladat megoldásában, az elégségesség bizonyításánál többnyire adottak tekintettek három egy pontból induló, nem egy síkban fekvő félegyenest, amelyek közti szögek hegyesszögek és összegük 180° . Ekkor nem is használták az a feltételt, hogy a szögek hegyesszögek. Valójában ez éppen annak a belátásához kell, hogy tetszés szerinti három hegyesszöghöz, amelyek összege 180° , van három olyan félegyenes, amelyek éppen ekkora szöget zárnak be. Emögött pedig az rejlik, hogy egy háromél élei közti szögek közül bármelyik kettő összege nagyobb a harmadiknál.

2. A megoldás gondolatmenetével tetszés szerinti tetraéderre belátható, hogy a szemközti élpárok felezőpontjait összekötő szakaszoknak – a tetraéder középvonalainak – közös a felezőpontja. A középvonalak a tetraéder bennfoglaló paralelepipedonjának egy csúcsból induló éleivel párhuzamosak és egyenlők. Így akkor és csak akkor merőlegesek páronként, ha a tetraéder egyenlőoldali.

2. Legyen az n a kettőnél nagyobb pozitív egész szám. Melyik az a legnagyobb h érték, és melyik az a legkisebb H érték, amelyekre igaz, hogy

$$(1) \quad h < \frac{a_1}{a_1 + a_2} + \frac{a_2}{a_2 + a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_n + a_1} < H$$

bármilyen pozitív számok legyenek is $a_1, a_2, \dots, a_n$?

I. megoldás. Nézzük két egymás utáni tag összegét:

$$\frac{a_i}{a_i + a_{i+1}} + \frac{a_{i+1}}{a_{i+1} + a_{i+2}},$$

itt az utolsó tag utánin az első értve. Ennek megfelelően a_{n+1} , a_{n+2} jelentsen a_1 -et, ill. a_2 -t. A két tag összege legalább 1, ha $a_{i+2} \leq a_i$, és legfeljebb 1, ha $a_{i+2} \geq a_i$.

Válasszuk i -t úgy, hogy a_{i+2} az előforduló legkisebb érték legyen. Ekkor a kiszemelt két tag összege legalább 1. A többi tag mind pozitív, és feltétel szerint van még legalább egy tag, így az összeg mindig nagyobb, mint 1. Ha viszont i -t úgy választjuk, hogy a_{i+2} az előforduló legnagyobb érték legyen, akkor a kiválasztott két tag összege legfeljebb 1; miután a további $n-2$ tag mindegyike kisebb 1-nél, így azt kapjuk, hogy az összeg mindig kisebb, mint

$$1 + n - 2 = n - 1.$$

Megmutatjuk, hogy az összeg mind a két korláthoz tetszés szerint közel kerülhet, ha az a_i sorozatot alkalmasan választjuk. Az

$$a_i = q^{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

pozitív q hányadosú mértani sorozathoz tartozó S_q összeg :

$$S_q = \frac{n-1}{1+q} + \frac{q^{n-1}}{q^{n-1}+1}.$$

Becsüljük ezt felülről. Bármilyen (kis) pozitív szám is p ,

$$S_q < \frac{n-1}{1+q} + 1 < 1 + \frac{n-1}{q} < 1 + p, \quad \text{ha } q > \frac{n-1}{p}.$$

Másrészt alulról becsülve S_q -t

$$S_q > \frac{n-1}{1+q} = n-1 - \frac{q(n-1)}{1+q} > (n-1) - (n-1)q > n-1-p, \quad \text{ha } q < \frac{p}{n-1}.$$

Ezzel beláttuk, hogy a feladatban kért értékek : $h = 1$, $H = n-1$.

Megjegyzések. 1. A vizsgált összeg felvesz minden értéket 1 és $n-1$ között. Ez igaz már a mértani sorozathoz tartozó S_q összegre, hiszen ez pozitív q -ra q -nak folytonos függvénye, amelyik felvesz $n-1$ -hez tetszés szerint közeli értékeket is és 1-hez tetszés szerint közeliéket is, tehát minden közbenső értéket is.

2. A további megoldásokban csak azt bizonyítjuk, hogy a kérdéses összeg 1 és $n-1$ közé esik. Az, hogy ezek a korlátok nem javíthatók, ugyanúgy látható be, mint az I. megoldásban.

II. megoldás. Fel fogjuk használni, hogy ha $x/y < 1$, és x , y pozitív, továbbá z is pozitív szám, akkor

$$\frac{x}{y} < \frac{x+y}{y+z}.$$

Valóban

$$\frac{x}{y} = \frac{x}{y}(y+z) \frac{1}{y+z} = \left(x + \frac{x}{y}z\right) \frac{1}{y+z} < \frac{x+z}{y+z}.$$

Jelöljük a rövidség kedvéért az $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ összeget S -sel. Egyfelől csökkentjük az i -edik törtet, ha a nevezőjéhez hozzáadjuk az $S - a_i - a_{i+1}$ összeget, másfelől növeljük, ha ezt az összeget a számlálóhoz is, a nevezőhöz is hozzáadjuk. Így a következő kettős egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\frac{a_i}{S} < \frac{a_i}{a_i + a_{i+1}} < \frac{S - a_{i+1}}{S}.$$

Itt a_{n+1} ismét a_1 -et jelent. Összeadva az egyenlőtlenségpárokat $i = 1, 2, \dots, n$ -re a bal oldalon 1-et, a jobb oldalon $n-1$ -et kapunk, vagyis a kívánt egyenlőtlenséget.

III. megoldás. Jelöljük T_n -nel a feladatban szereplő összeget és az $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$ fordított sorrendben vett sorozathoz tartozót T'_n -vel. Mind a két összeg törtjeiben ugyanazok a nevezők lépnek fel, és a két összeg azonos nevezőjű törtjeinek az összege 1, így

$$T_n + T'_n = n.$$

Így ha megmutatjuk, hogy a szóban forgó összeg mindig nagyobb, mint 1, akkor ez igaz T'_n -re is, tehát

$$T_n = n - T'_n < n - 1.$$

Teljes indukcióval bizonyítjuk, hogy 1 alsó korlát. Az $n = 3$ esetben közös nevezőre hozva az összeget, és számlálót, nevezőt tagokra bontva a nevező minden tagja előfordul a számlálóban is legalább akkora együtthatóval. A számításokat elvégezve:

$$T_3 = 1 + \frac{a_1 a_2 a_3 + a_1^2 a_2 + a_2^2 a_3 + a_3^2 a_1}{(a_1 + a_2)(a_2 + a_3)(a_3 + a_1)} > 1.$$

Tegyük most fel, hogy az n pozitív számból képezett összegek mindig 1-nél nagyobbak, ahol $n \geq 3$. Ekkor elég azt megmutatnunk, hogy az $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ számokból képezett T_{n+1} összeg nagyobb az első n számból képezettnél. De

$$\begin{aligned} T_{n+1} - T_n &= \frac{a_n}{a_n + a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_{n+1} + a_1} - \frac{a_n}{a_n + a_1} = \\ &= \frac{a_n}{a_n + a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_{n+1} + a_1} + \frac{a_1}{a_1 + a_n} - 1 > 0, \end{aligned}$$

mert a három tört összege az a_n, a_{n+1}, a_1 számokból képezett összeg, és erről már beláttuk, hogy mindig nagyobb 1-nél. Így, felhasználva az indukciós feltevést is,

$$T_{n+1} > T_n > 1,$$

és ezt kellett bizonyítanunk.

Megjegyzések. 1. Az utolsó bizonyítást lényegesen egyszerűsíthettük volna egyrészt azzal az észrevétellel, hogy T_{n+1} nem változik meg, ha a számokat ciklikusan cseréljük. Így választhatjuk a sorrendet úgy, hogy a_{n+1} az előforduló legkisebb érték legyen. Ekkor a $T_{n+1} - T_n$ különbségben az első tag nem kisebb a kivonandónál, a különbség tehát pozitív. Másrészt képezhető a szóban forgó összeg két számból is és az értéke 1, így minden 2-nél nagyobb n -re már 1-nél nagyobb. Ezzel elkerülhető minden számolás.

A fenti megoldás viszont azt mutatja, hogy az indukciós bizonyítás minden további fogás nélkül is célra vezet. így viszont a 3 tag esetére nem lett volna érdemes elkerülni a kiszámolást, mert azt a megoldás második részében is fel tudtuk használni.

2. A vizsgált összeg valójában csak az a_{i+1}/a_i hányadosoktól függ. Jelöljük ezeket b_i -vel $i = 1, 2, \dots, n-1$ -re és legyen $b_n = a_n/a_1$. Ekkor a vizsgált összeg az

$$\frac{1}{1+b_1} + \frac{1}{1+b_2} + \dots + \frac{1}{1+b_n}$$

alakot ölti, és itt

$$b_1 b_2 \dots b_n = 1.$$

Vonjuk össze az utolsó két tagot:

$$\frac{1}{1+b_{n-1}} + \frac{1}{1+b_n} > \frac{1+b_{n-1}+b_n}{1+b_{n-1}b_n+b_{n-1}+b_n} > \frac{1}{1+b_{n-1}b_1}$$

a II. megoldásban alkalmazott megjegyzés alapján. Ezt beírva az összegbe a $b_1, \dots, b_{n-2}, b_{n-1}b_n$ számokból képezett $n-1$ -tagú összeget kapjuk, és a számok szorzata továbbra is 1. Ennek alapján újabb teljes indukciós bizonyítást nyerhetünk.

3. A és B a következő játékot játssza: az első 100 pozitív egész közül véletlenszerűen kiválasztanak k darabot és ha ezek összege páros, akkor A nyer, egyébként pedig B. A k milyen értékeire lesz egyenlő A és B nyeresi esélye?

I. megoldás. Az első 100 pozitív egész szám közül kiválasztható k -asok közül úgy választunk ki csoportokat, ameddig tudunk, hogy egy-egy csoportban ugyanannyinak az összege legyen páros, mint amennyié páratlan. Válasszuk ki először azokat, amelyekben szerepel vagy az 1 vagy a 100, de nem mind a kettő. Ezeket párokba állíthatjuk úgy, hogy az első 98 szám közül kiválasztott egy-egy $k-1$ -eshez egyszer az 1-et, egyszer a 100-at vesszük k -adiknak. Ekkor minden pár egyik k -asának az összege páros, a másiké páratlan.

A maradó k -asok közül vegyük azokat, amelyek a 2 és a 99 közül az egyiket tartalmazzák, a másikat nem. Ezek közül is ugyanannyinak az összege páros, mint amennyié páratlan, az előbbi gondolatmenet szerint. Az eljárást tovább ismételtük a 3, 98, a 4, 97, $\dots$, az 50, 51 párral. Ezután már csak olyan k -asok maradnak meg, amelyek a kiválasztáshoz használt párok közül bizonyosoknak mindkét eleméből tevődnek össze. Ilyenek csak páros k esetén vannak, tehát páratlan k esetén A-nak és B-nek egyenlő esélye van a nyeresre.

Páros k esetén azok a k -asok maradnak meg, amelyek az említett 50 pár közül $k/2$ -nek mindkét eleméből állnak. Mivel mindegyik pár két elemének összege 101, tehát páratlan szám, így mindegyik fennmaradt k -as elemeinek összege páros, ha $k/2$ páros és páratlan, $k/2$ páratlan. Ezek szerint A-nak nagyobb a nyeresi esélye, ha k osztható 4-gyel, ha viszont k 4-gyel osztva 2 maradékot ad, akkor B esélye nagyobb a nyeresre.

Megjegyzések. 1. Az elmondottak alapján ki is számíthatjuk, ki hány esetben nyer. A kiválasztható k -asok száma $\binom{100}{k}$ és, ha k páros, akkor $\binom{50}{k/2}$ -vel több esetben nyer az egyik játékos, mint a másik. Így páratlan k esetén mindegyikük

$$\frac{1}{2} \binom{100}{k}$$

esetben nyer, páros k esetén pedig az egyikük és másikuk számára kedvező esetek száma

$$\frac{1}{2} \left(\binom{100}{k} - \binom{50}{k/2} \right), \quad \text{ill.} \quad \frac{1}{2} \left(\binom{100}{k} + \binom{50}{k/2} \right).$$

2. Az eljárás alkalmazható akkor is, ha 100 helyett bármilyen páros N számot mondunk. A válasz ekkor is ugyanaz, mint a 100 esetében volt. Ha páratlan N számot veszünk 100 helyett, akkor már sohasem egyenlők a nyerési esélyek. Ilyenkor 1 és $N - 1$, majd 2 és $N - 2$, 3 és $N - 3$ és így tovább, ismét használhatók egyenlő esélyt adó k -asok kiválasztására. A fennmaradó k -asok közül külön kell foglalkozni azokkal, amelyekben előfordul az N . A részletek végiggondolását az olvasóra bizzuk. B -nek nagyobb a nyerési esélye, ha k 4-gyel osztva 1 vagy 2 maradékot ad, különben A -nak.

II. megoldás. Vizsgáljuk az 1, 2, ..., $2N$ számok közül kiválasztható k -asokat. Jelöljük $D(N, k)$ -val a páros, illetve a páratlan összegű k -asok számának a különbségét. Erre a függvényre állapítunk meg egy rekurzív összefüggést. Legyen $k \leq 2N - 2$. Csoportosítsuk a k -asokat aszerint, hogy hány számot tartalmaznak a $(2N - 1, 2N)$ párból. Az első csoportba tartozzanak azok a k -asok, amelyek tartalmazzák mind a kettőt, a másodikba azok, amelyek egyiket sem tartalmazzák, a harmadikba pedig azok, amelyek az egyiket tartalmazzák, a másikat nem.

A harmadik csoportbeli k -asoknak $k - 1$ eleme nem nagyobb $2N - 2$ -nél, és minden ilyen $k - 1$ -es a $2N - 1$ -gyel és a $2N$ -nel is k -assá egészíthető ki. Az elemek összege a két k -as közül az egyikben páros, a másikban páratlan. A harmadik csoportban tehát ugyanannyi páros összegű k -as van, mint páratlan összegű, így ezek járuléka $D(N, k)$ értékéhez 0.

A második csoport k -asai csupa $2N - 2$ -n él nem nagyobb számból állnak, ezek tehát $D(N - 1, k)$ -t adnak $D(N, k)$ értékéhez.

Az első csoport minden k -asa $k - 2$ elemet tartalmaz, amelyek nem nagyobbak $2N - 2$ -nél, továbbá a $2N - 1$ -et és a $2N$ -et. Az első $k - 2$ elem összegét tekintve a vizsgált különbség $D(N - 1, k - 2)$. A k -asokban még $2N - 1 + 2N$, tehát páratlan szám adódik az összeghez, így annak párossága az ellenkezőjére változik. Az első csoport k -asai, tehát $-D(N - 1, k - 2)$ -vel járulnak hozzá $D(N, k)$ értékéhez. Ezzel a következő összefüggést kaptuk:

$$(3) \quad D(N, k) = D(N - 1, k) - D(N - 1, k - 2).$$

Az összefüggés $k = 2N - 1$ -re és $k = 2N$ -re is helyes, ha megállapodunk abban, hogy ha $k > 2N$, akkor $D(N, k)$ jelentsen 0-t.

Ennek alapján teljes indukcióval igazoljuk a következő állítást: $D(N, k)$ pozitív, ha k osztható 4-gyel, negatív, ha k páratlan szám kétszerese, és 0, ha k páratlan. Belátjuk először, hogy ez $k = 1, 2, 3$ és 4-re igaz. ($2N$ tetszőleges, k -nál nem kisebb páros szám.)

$k = 1$ -re N páros szám van az adottak közt és N páratlan, így $D(N, 1) = 0$.

Párokat választva ki, akkor lesz az összeg páros, ha vagy mind a két szám páros, vagy mind a kettő páratlan, és akkor lesz páratlan, ha az egyik szám páros, a másik páratlan. Az előbbi és az utóbbi típusú párok száma $2 \binom{N}{2} = N(N - 1)$, ill. N^2 , tehát $D(N, 2) = -N < 0$. Ezek az értékek $N = 1$ -re is helyesek.

Három szám összege páros, ha mindegyik szám páros, vagy egyikük páros, a másik kettő páratlan; viszont páratlan az összeg, ha mindegyik szám páratlan, vagy ha egyikük páratlan, a másik kettő pedig páros. Mivel a páros és páratlan számok száma egyenlő, így a kétféle hármasok száma is megegyezik, tehát

$$D(N, 3) = 0.$$

Ha $k = 4$, akkor páros összeget kapunk, ha mind a 4 páros, vagy mind a 4 páratlan, vagy közülük 2 páros, 2 páratlan. Páratlan lesz az összeg, ha a 4 szám között 1 páratlan van, vagy ha 1 páros van. Az egyik-, ill. másikféle esetek száma

$$\begin{aligned} 2 \binom{N}{4} + \binom{N}{2}^2 &= \frac{N(N - 1)(N - 2)(N - 3)}{12} + \frac{N^2(N - 1)^2}{4} = \\ &= \frac{N(N - 1)(2N^2 - 4N - 3)}{6}, \end{aligned}$$

illetőleg

$$2N \binom{N}{3} \frac{N^2(N - 1)(N - 2)}{3} = \frac{N(N - 1)(2N^2 - 4N)}{6};$$

$N = 2$ esetén az esetek száma 1, ill. 0. Eszerint

$$D(N, 4) = \frac{n(N - 1)}{2} > 0.$$

A vizsgált k értékek esetén tehát minden szóba jövő N -re igaz az állítás. Ekkor egyszersmind $N = 1$ és $N = 2$ -re minden szóba jövő k esetén igaz az állítás.

Tegyük most fel, hogy $M > 2$, $K > 4$ és igaz az állítás, ha $k < K$, továbbá az M -nél kisebb N -ekre tetszés szerinti szóba jövő k mellett. A (3) összefüggés szerint

$$D(M, K) = D(M - 1, k) - D(M - 1, K - 2).$$

Ha K páratlan, akkor $K - 2$ is, így feltevés szerint a jobb oldal mindkét tagja 0, tehát $D(M, K)$ is az. Ha K páros, akkor $K - 2$ is, és feltevés szerint $D(M - 1, K)$, ha nem 0 (ti. ha $M = K$), ellenkező előjelű, mint $D(M - 1, K - 2)$. Az indukciós feltételből az is következik, hogy $D(M - 1, K - 2)$ nem 0. Azt kaptuk tehát, hogy $D(M, K)$ sem 0, és ellenkező előjelű, mint $D(M - 1, K - 2)$. Ez azonban azt jelenti, hogy az állítás helyessége öröklődik M és K -ra. A kimondott állítás tehát minden szóba jövő N, k értékpárra igaz.

Megjegyzések. 1. Felesleges volt $D(N, 3)$ és $D(N, 4)$ kiszámítása, mert az indukciós bizonyítás már ezekre is adja az állítás helyességét. Jónak láttuk azonban mind a 4 lehetséges esetre bemutatni egy-egy példát. Aki nem tartja erőszakoltnak a $k = 0$ eset megengedését, ezt tekintheti a $k = 2$ helyett további egyszerűsítésként.

2. A teljes indukciónak itt egy ritkábban előforduló esetével találkoztunk, a két változó szerint egyidejűleg futó teljes indukcióval, hiszen mikor M -re és K -ra bizonyítottuk az öröklődést, fel kellett használnunk azt is, hogy $M - 1$ -re és ugyanerre a K -ra igaz az állítás. Így tulajdonképpen a $k = 2$ eset után $k = 3$ -ra és minden N -re, majd $K = 4$ -re és így tovább adódik az állítás helyessége. Ehhez viszont kell az, hogy a legkisebb N értékre minden szóba jövő k esetén igaz legyen az állítás. Esetünkben ez mindössze az $N = 1, k = 1, 2$ eseteket jelentette. Annyiban is speciális volt ez a bizonyítás, hogy M -re a K -nál kisebb k -kra nem volt szükség felhasználnunk az indukciós feltevést.

III. megoldás. Az előző megoldásban bevezetett jelöléssel $D(50, k)$ -t kapcsolatba hozhatjuk az

$$1 + (-1)^c x, \quad c = 1, 2, \dots, 100$$

elsőfokú polinomok szorzatával. Ebben úgy kapjuk a k -adfokú tagokat, hogy k tényezőtől az x -es tagot vesszük, a többiből az 1-et, ezeket összeszorozzuk és az összes ilyen tagot összeadjuk. Egy-egy ilyen tagban x^k együtthatója -1 -nek a $c_1 + c_2 + \dots + c_k$ -adik hatványa, ahol az összeadandók különböző, 100-nál nem nagyobb egészek. Az együttható tehát 1, ha az összeg páros, -1 , ha az összeg páratlan. Eszerint x^k együtthatója a szorzatban éppen $D(100, k)$.

A szorzat másfelől felváltva $1 + x$ és $1 - x$ tényezők szorzata, vagyis

$$(1 - x^2)^{50} = 1 - 50x^2 + \dots + (-1)^j \binom{50}{j} x^{2j} + \dots + x^{100}.$$

Eszerint egyenlők a nyerési esélyek, ha k páratlan, $\binom{50}{j}$ -vel több esetben nyer A , mint B , ill. B , mint A , ha $k = 2j$ és j páros, ill. páratlan.

Megjegyzés. Az $F(k) = D(100, k)$ függvényt úgy sikerült meghatároznunk, hogy hozzárendeltük az

$$F(x) = 1 + f(1)x + f(2)x^2 + \dots + f(100)x^{100}$$

polinomot, amit sikerült más alakba írni és abból f értékeit meghatározni. F -et az f generátor függvényének nevezzük. A generátorfüggvény gondolata és számos érdekes alkalmazása Leonhard Euler (1707 – 1783) rendkívül termékenynek bizonyult felfedezése, ami a matematika számos ágában alapvető szerepet kapott. Feladatunkban alkalmazható 100 helyett tetszés szerinti N számra, és az I. megoldáshoz fűzött 2. megjegyzésben kimondott eredményre vezet. A számolás elvégzését az olvasóra bízuk.

Surányi János

Helyesbítés

Az 1985/86-os évi pontverseny iskolák szerinti összesítéséből (1986/10. szám, 455 – 456. oldal) sajnálatos módon kimaradt a *Landler Jenő Gimnázium* (Budapest, XIX.) tanulóinak eredménye. Az iskolából 3 tanuló (dr. Marosvári Péter tanár tanítványai) összesen 260 pontot szerzett.

Ezúton kérjük az érintettek szíves elnézését.

A szerkesztőség