

F. 2611. *Egy téglatest alakú ládát olyan egybevágó téglákkal akarunk megtölteni, amelyek élének aránya $1 : 2 : 4$. Bizonyítsuk be, hogy ez csak akkor lehetséges, ha a láda úgy is megtölthető, hogy az ugyanolyan hosszú tégláék mind párhuzamosak legyenek.*

A feladatra két megoldást közöltünk a KÖMAL 1987. évi 6. számában. Az alábbi megoldás *Hajós Györgytől* származik, 1961-ből.

A legrövidebb tégláért válasszuk hosszegységnek. Olyan a , b , c élű ládát tekintünk, amely megtölthető a megadott téglákkal. Az a , b , c számok mindegyike egész, mert a láda megtöltésekor minden tégláért egész, 1, 2, 4 hosszúságú tégláék fednek le. Azt kell bizonyítanunk, hogy az a , b , c számok között van 4-gyel osztható, és van még egy másik páros. Az ab , ac és bc szorzatok mind párosak, mert mindegyikük egy-egy ládalap területe, és a láda megtöltésekor minden ládalapot páros, 2, 4 vagy 8 területű téglalapok borítanak be. Eszerint az a , b , c számok közül legalább kettő páros, és már csak azt kell megmutatnunk, hogy van közöttük 4-gyel osztható is. Az abc térfogat osztható 8-cal, ezért ha a , b és c közül csak kettő páros, akkor egyikük osztható 4-gyel is.

A nehezebb eset az, amikor a , b és c mindegyike páros. Ekkor persze minden ládalap területe osztható 4-gyel. Ha tehát a ládát az egyik ládaélre merőleges síkokkal 1 vastagságú rétegekre vágjuk fel, akkor minden réteg térfogata osztható 4-gyel. Egy-egy ilyen rétegből egy téglá 2, 4 vagy 8 térfogatú részt foglal el aszerint, hogy a téglá 4, 2 vagy 1 hosszúságú élei párhuzamosak-e a kiszemelt ládaéllel. Minthogy 2, 4 és 8 közül csak a 2 nem osztható 4-gyel, az egy ilyen rétegbe nyúló téglák között páros sok olyan van, amelynek a leghosszabb éle párhuzamos a kiszemelt ládaéllel, vagyis avval, amelyikre merőleges síkokkal rétegekre vágtuk a ládát.

Válasszuk ki most az egyik ládalaptól kezdve minden negyediket a rétegek közül. Minden olyan téglá, amelynek leghosszabb, 4 egységnyi éle erre a ládalapra merőleges, belenyúlik e rétegek valamelyikébe, és csak egybe. A fentiek szerint tehát az ilyen állású téglák száma páros. Miután pedig ez a három egy csúcsba futó ládalap mindegyikére teljesül, valamennyi téglát számbavesszük, és így a ládában összesen páros sok téglá van. A láda abc térfogata eszerint a 8-nak páros számú többszöröse, és így 16-tal is osztható. Ezért a , b és c között ilyenkor is van 4-gyel osztható.