

Varsóban, a XXVII. Nemzetközi Matematikai Diákolimpián szerepelt a következő feladat:

„Egy szabályos ötszög csúcsaihoz egy-egy egész számot rendelünk úgy, hogy összegük pozitív legyen.

Megengedett a következő művelet: ha három szomszédos csúcs x , y , z , a hozzájuk rendelt számok x , y , z , és $y < 0$, akkor az x , y , z , számok helyére ugyanilyen sorrendben az $x + y$, $-y$, $z + y$ számokat írjuk. Ezt a műveletet ismételjük addig, amíg csak található negatív y . Döntsük el, vajon minden esetben véget ér-e az eljárás véges sok lépés után!”

A feladatot megfogalmazhatjuk általánosabban is úgy, hogy a szabályos ötszög helyett szabályos n -szöget tekintünk ($n \geq 3$).

A továbbiakban bizonyítást adunk arra, hogy az eljárás – bármely n esetén – véges sok lépés után véget ér.

Gondolatmenetünk a következő lesz: minden szám n -eshez egy-egy nem negatív egész számot rendelünk úgy, hogy ez a szám minden egyes „művelet” során csökkenjen. Ha tehát a kezdeti szám n -eshez rendelt érték S_0 , az első „művelet” során keletkező szám n -eshez rendelt szám S_1 , és általában (ha a műveletet k -szor végre tudjuk hajtani), a k -adik „művelet” során keletkező szám n -eshez rendelt szám S_k , akkor $S_0 > S_1 > S_2 > \dots > S_k \geq 0$ legyen. $S_1, S_2, \dots, S_k$ így csupa különböző, S_0 -nál kisebb nem negatív egész, ennél fogva $k \leq S_0$, ami azt jelenti, hogy az eljárás véges sok – legfeljebb S_0 darab lépés után véget ér.

Vezessük be a következő függvényeket:

$$\begin{aligned} p_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \\ p_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 + \dots + (x_n + x_1)^2 \\ p_3(x_1, x_2, \dots, x_n) &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3 + x_4)^2 + \dots + (x_n + x_1 + x_2)^2 \\ &\vdots \\ p_{n-2}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= (x_1 + x_2 + \dots + x_{n-2})^2 + (x_2 + x_3 + \dots + x_{n-1})^2 + \\ &\quad + \dots + (x_n + x_2 + \dots + x_{n-3})^2. \end{aligned}$$

Legyen $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ egy szám n -es, amelyben $a_1 + a_2 + \dots + a_n > 0$ (egy „művelet” során a számok összege nem változik) és legyen például $a_1 < 0$.

Legyen továbbá $b_1 = -a_1$, $b_2 = a_2 + a_1$, $b_3 = a_3$, $b_4 = a_4$, $\dots$, $b_{n-1} = a_{n-1}$, $b_n = a_n + a_1$ az a szám n -es, amely úgy keletkezik, hogy a „műveletet” az (a_n, a_1, a_2) számokra végrehajtjuk.

Megmutatjuk, hogy

$$p_1(b_1, b_2, \dots, b_n) - p_1(a_1, a_2, \dots, a_n) = 2a_1(a_1 + a_2 + a_n),$$

és minden $2 \leq i \leq (n-2)$ -re

$$p_i(b_1, b_2, \dots, b_n) - p_i(a_1, a_2, \dots, a_n) = 2a_1(a_{i+1} + a_{n-i+1}).$$

Mivel minden $3 \leq j \leq (-1)$ -re $b_j = a_j$, ezért p_1 megváltozása valóban

$$\begin{aligned} p_1(b_1, b_2, \dots, b_n) - p_1(a_1, a_2, \dots, a_n) &= b_1^2 - a_1^2 + b_2^2 - a_2^2 + b_n^2 - a_n^2 = \\ &= ((-a_1)^2 - a_1^2) + ((a_2 + a_1)^2 - a_2^2) + ((a_n + a_1)^2 - a_n^2) = 2a_1(a_1 + a_2 + a_n). \end{aligned}$$

Legyen most $2 \leq i \leq n-2$ (természetesen csak ha $n \geq 4$). Ekkor

$$\begin{aligned} p_i(b_1, b_2, \dots, b_n) - p_i(a_1, a_2, \dots, a_n) &= \sum_{j=1}^n [(b_j + b_{j+1} + \dots + b_{j+i-1})^2 - \\ &\quad - (a_j + a_{j+1} + \dots + a_{j+i-1})^2]. \end{aligned}$$

Mivel $b_1 + b_2 + b_n = a_1 + a_2 + a_n$, $b_3 = a_3$, $b_4 = a_4$, $\dots$, $b_{n-1} = a_{n-1}$, elég azokat a j -ket vizsgálni, amelyekre a_1 , a_2 , a_n közül egy vagy kettő szerepel az $a_j, a_{j+1}, \dots, a_{j+i-1}$ számok között; a többire nyilván

$$b_j + b_{j+1} + \dots + b_{j+i-1} = a_j + a_{j+1} + \dots + a_{j+i-1},$$

és így

$$(b_j + b_{j+1} + \dots + b_{j+i-1})^2 - (a_j + a_{j+1} + \dots + a_{j+i-1})^2 = 0.$$

Könnyű ellenőrizni, hogy csak négy ilyen j van:

$$j = 1, \quad j = 2, \quad j = n - i + 1, \quad j = n - i + 2,$$

és így

$$\begin{aligned} p_i(b_1, b_2, \dots, b_n) - p_1(a_1, a_2, \dots, a_n) &= (b_1 + b_2 + \dots + b_i)^2 - (a_1 + a_2 + \dots + a_i)^2 + \\ &+ (b_2 + b_3 + \dots + b_{i+1})^2 - (a_2 + a_3 + \dots + a_{i+1})^2 + (b_{n-i+1} + b_{n-i+2} + \dots + b_n)^2 - \\ &- (a_{n-i+1} + a_{n-i+2} + \dots + a_n)^2 + (b_{n-i+2} + b_{n-i+3} + \dots + b_n + b_1)^2 - \\ &- (a_{n-i+2} + a_{n-i+3} + \dots + a_n + a_1)^2. \end{aligned}$$

Mivel

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + \dots + b_i &= (a_1 + a_2 + \dots + a_i) - a_1, \\ b_2 + b_3 + \dots + b_{i+1} &= (a_2 + a_3 + \dots + a_{i+1}) + a_1, \\ b_{n-i+1} + b_{n-i+2} + \dots + b_n &= (a_{n-i+1} + a_{n-i+2} + \dots + a_n) + a_1 \end{aligned}$$

és

$$b_{n-i+2} + b_{n-i+3} + \dots + b_1 = (a_{n-i+2} + a_{n-i+3} + \dots + a_1) - a_1,$$

ezért

$$\begin{aligned} (b_1 + b_2 + \dots + b_i)^2 - (a_1 + a_2 + \dots + a_i)^2 &= a_1^2 - 2a_1(a_1 + a_2 + \dots + a_i) = \\ &= -a_1^2 - 2a_1(a_2 + a_3 + \dots + a_i), \\ (b_2 + b_3 + \dots + b_{i+1})^2 - (a_2 + a_3 + \dots + a_{i+1})^2 &= a_1^2 + 2a_1(a_2 + a_3 + \dots + a_{i+1}) = \\ &= a_1^2 + 2a_1(a_2 + a_3 + \dots + a_i) + 2a_1a_{i+1}, \\ (b_{n-i+1} + b_{n-i+2} + \dots + b_n)^2 - (a_{n-i+1} + a_{n-i+2} + \dots + a_n)^2 &= \\ &= a_1^2 + 2a_1(a_{n-i+1} + a_{n-i+2} + \dots + a_n) = \\ &= a_1^2 + 2a_1(a_{n-i+2} + a_{n-i+3} + \dots + a_n) + 2a_1a_{n-i+1}, \\ (b_{n-i+2} + b_{n-i+3} + \dots + b_1)^2 - (a_{n-i+2} + a_{n-i+3} + \dots + a_1)^2 &= \\ &= a_1^2 - 2a_1(a_{n-i+2} + a_{n-i+3} + \dots + a_1) = -a_1^2 - 2a_1(a_{n-i+2} + a_{n-i+3} + \dots + a_n), \end{aligned}$$

és így valóban

$$p_i(b_1, b_2, \dots, b_n) - p_i(a_1, a_2, \dots, a_n) = 2a_1a_{i+1} + 2a_1a_{n-i+1} = 2a_1(a_{i+1} + a_{n-i+1}).$$

Ezzel a p_i polinomokra vonatkozó állításunkat bebizonyítottuk.

$$\text{Legyen ezután } f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 2p_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=2}^{n-2} p_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

(ha $n = 3$, akkor $\sum_{i=2}^{n-2} p_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$).

Mivel $p_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$, hisz négyzetek összege, ezért nyilván

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0.$$

Az eddigiek alapján

$$\begin{aligned} f(b_1, b_2, \dots, b_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n) &= 2[p_1(b_1, b_2, \dots, b_n) - p_1(a_1, a_2, \dots, a_n)] + \\ &+ \sum_{i=2}^{n-2} [p_i(b_1, b_2, \dots, b_n) - p_i(a_1, a_2, \dots, a_n)] = 4a_1(a_1 + a_2 + a_n) + \\ &+ \sum_{i=2}^{n-2} 2a_1(a_{i+1} + a_{n-i+1}) = 2a_1(2a_1 + 2a_2 + 2a_n + (a_3 + a_4 + \dots + a_{n-1}) + \\ &+ (a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3)) = 4a_1(a_1 + a_2 + \dots + a_n). \end{aligned}$$

Mivel $a_1 < 0$ és $a_1 + a_2 + \dots + a_n > 0$, $f(b_1, b_2, \dots, b_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n) < 0$, azaz $f(a_1, a_2, \dots, a_n) > (b_1, b_2, \dots, b_n)$.

Az f polinom tehát a szám n -esekhez úgy rendel természetes számokat, hogy ezek a számok minden „művelet” során csökkennek (ezt az $x = a_n$, $y = a_1$, $z = a_2$ esetben láttuk be; az indexelés ciklikus cseréjével azonban a többi esetben is hasonlóan mutatható meg).

Sikerült tehát a szám n -esekhez megfelelő nem negatív egészeket rendelnünk és ezzel igazoltuk állításunkat.