

A klasszikus analízis egyik igen hasznos képletét és ennek néhány jellegzetes alkalmazását kívánja megismertetni ez a cikk az olvasóval. Közismertek (többnyire a teljes indukció alkalmazásaként) az

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

összefüggések. Vajon a negyed-, ötöd-, és általában a magasabb fokú hatványösszegekre nem írhatók fel megfelelő eredmények? Mi történik, ha a kitevő -1 , azaz mekkora szám mondjuk $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{100}$? Általánosabban, $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ értéke hogyan becsülhető? Hány jegyű szám a 10-es számrendszerben a $100! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 100$? Milyen gyorsan növekszik az $n!$ sorozat? Az utóbbi kérdések és a rájuk adható válasz az egyetemi matematikatanítás témája, ám ott sem mindig derül ki, hogy a bizonyítások háttere mindig ugyanaz a módszer, Euler nevezetes összegképlete. Az összegképlet és számos alkalmazásának megértéséhez az analízis elemeire van csupán szükség, ezért kezdők számára is meggyőző a módszer hatékonysága.

2. Az Euler-képlet legegyszerűbb esete

A képlethez vezető alapgondolat a következő: tegyük fel, hogy valamely f függvénynek a $0 \leq i \leq n$ egész számokon felvett értékeinek az összegét akarjuk kiszámítani, azaz az $S = f(0) + f(1) + \dots + f(n)$ mennyiségre vagyunk kíváncsiak. Az f függvényről kikötjük, hogy elég „jó tulajdonságú”, például a $[0; +\infty)$ intervallumban differenciálható és a

deriváltja is folytonos. Az S összeg helyett az $I = \int_0^n f(x) dx$ integrált tekintjük. Ennek persze fogalmilag sokkal bonyo-

lultabb a definíciója, mégis a gyakorlat számára jobban hozzáférhető. Érdemi eredményre persze csak úgy juthatunk, ha lehetőségünk van az $S - I$ „hiba” becslésére.

Az $\int_j^{j+1} f(x) dx = \int_j^{j+1} 1 \cdot f(x) dx$ integrálra alkalmazzuk a parciális integrálás módszerét. Az azonosan 1 függvény $x + c$ primitív függvényében a c állandó értékét válasszuk meg úgy, hogy $f(j+1)$ és $f(j)$ szorzója megegyezzek:

$$\begin{aligned} \int_j^{j+1} f(x) dx &= \int_j^{j+1} \left(x - j - \frac{1}{2}\right)' f(x) dx = \left[\left(x - j - \frac{1}{2}\right) f(x)\right]_j^{j+1} - \\ &- \int_j^{j+1} \left(x - j - \frac{1}{2}\right) f'(x) dx = \frac{1}{2}(f(j+1) + f(j)) + \\ &+ \int_j^{j+1} \left([x] - x + \frac{1}{2}\right) \cdot f'(x) dx, \end{aligned}$$

hiszen a $(j, j+1)$ szakaszon $[x] = j$.

1987-11-338-1.eps

1. ábra

Adjuk össze a $j = 0, 1, \dots, (n-1)$ esetben kapott fenti egyenlőségeket, így

$$\int_0^n f(x) dx = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} (f(j+1) + f(j)) + \int_0^n p(x) f'(x) dx$$

adódik, ahol $p(x) = [x] - x + \frac{1}{2}$. Az integrál geometriai jelentése, mint tudjuk, a függvénygörbe és az x tengely közötti (előjeles) terület. A jobb oldalon álló összeg tagjai az 1. ábrán jelzett trapézok területét adják, maga a fenti formula pedig a numerikus integrálásban is jól ismert ún. *trapéz-módszer* képlete. A trapézösszegben az $f(0)$ és $f(n)$ értékek kivételével mindegyik $f(j)$ függvényérték kétszer fordul elő, így eredményünket

$$\int_0^n f(x) dx = \frac{1}{2}[f(0) + f(n)] + \sum_{j=1}^{n-1} f(j) + \int_0^n p(x) f'(x) dx,$$

illetve a

$$(1) \quad \sum_{j=1}^n f(j) = \int_0^n f(x) dx + \frac{1}{2}[f(0) + f(n)] - \int_0^n p(x)f'(x) dx$$

alakba írhatjuk. Ez a nevezetes *Euler-féle* összegképlet. A 0 és n egész számoknak nincs kitüntetett szerepe, gondolatmenetünk tetszőleges $a \leq b$ egész számokra a

$$(2) \quad \sum_{j=a}^b f(j) = \int_a^b f(x) dx + \frac{1}{2}[f(a) + f(b)] - \int_a^b p(x)f'(x) dx$$

képletet adja.

Eredményünk alkalmazhatósága azon múlik, hogy ki tudjuk-e számítani az $\int_0^n f(x) dx$ integrált és főleg, hogy tudjuk-e becsülni az $\int_0^n p(x)f'(x) dx$ maradéktagot.

3. A harmonikus sor és az Euler-állandó

Foglalkozzunk a bevezetőben felvetett egyik kérdéssel, az ún. harmonikus sor $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ részletösszegeinek vizsgálatával. Alkalmazzuk Euler képletét az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvényre:

$$s_n = \int_1^n \frac{1}{x} dx + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \int_1^n p(x) \frac{1}{x^2} dx = \log n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \int_1^n p(x) \frac{1}{x^2} dx.$$

Az $\int_1^n p(x) \frac{1}{x^2} dx$ maradéktagban újra a parciális integrálás módszerét akarjuk felhasználni. Vegyük ehhez szemügyre

a $p(x) = [x] - x + \frac{1}{2}$ függvényt. Ez a függvény 1 szerint periodikus, az egész számokban szakad és közöttük egyenes szakasz ábrázolja, mint az a 2. ábrán látható.

1987-11-339-1.eps

2. ábra

Ennek integrálfüggvényét, a

$$q(x) = \int_0^x p(t) dt$$

függvényt a 3. ábra szemlélteti.

1987-11-339-2.eps

3. ábra

Mivel $\int_j^{j+1} p(x) dx = 0$, ezért $q(x)$ is 1 szerint periodikus és parabolaívekből áll (elsőfokú függvény integrálja másod-

fokú!). A definíció alapján azonnal látható, hogy $q \geq 0$ és $q(x) < \max q(x) = q\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$, továbbá $q(k) = 0$ minden k egész szám esetén.

A parciális integrálás képlete szerint

$$\int_1^n p(x) \frac{1}{x^2} dx = \left[q(x) \frac{1}{x^2} \right]_1^n + 2 \int_1^n q(x) \frac{1}{x^3} dx = 2 \int_1^n q(x) \frac{1}{x^3} dx.$$

Ennek alapján

$$s_n = \log n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + 2 \int_1^n q(x) \frac{1}{x^3} dx,$$

és itt már könnyű belátni, hogy a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2 \int_1^n q(x) \frac{1}{x^3} dx = 2 \int_1^\infty q(x) \frac{1}{x^3} dx$$

határérték létezik. Valóban, a $2 \int_1^n q(x) \frac{1}{x^3} dx$ sorozat (n , a felső határ a változó) monoton növekedő, mert $q(x) \frac{1}{x^3} > 0$ és korlátos is, mert

$$\begin{aligned} 2 \int_1^n q(x) \frac{1}{x^3} dx &\leq 2 \int_1^n \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{4} \int_1^n \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{8} \left[-\frac{1}{x^2} \right]_1^n = \\ &= \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) < \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Így persze a $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + 2 \int_1^n q(x) \frac{1}{x^3} dx \right) = \frac{1}{2} + 2 \int_1^\infty q(x) \frac{1}{x^3} dx$ határérték is létezik; ez a szám a nevezetes Euler-féle állandó. Igen sok helyen bukkan elő az analízisben, de ma sem ismeretes, hogy például γ racionális szám-e. Visszatérve s_n előállítására,

$$s_n = \log n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + 2 \int_1^n q(x) \frac{1}{x^3} dx = \log n + \gamma + \frac{1}{2n} - 2 \int_n^\infty q(x) \frac{1}{x^3} dx,$$

tehát

$$|s_n - \log n - \gamma| \leq \frac{1}{2n} + 2 \int_n^\infty \frac{1}{8} \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{2n} + \frac{1}{8n^2},$$

vagyis s_n értéke igen jó közelítéssel $\log n + \gamma$.

4. Az $n!$ és a Stirling-formula

Az $n!$ tanulmányozásához térjünk át a $\log(n!)$ értékre. Persze $\log(n!) = \sum_{k=1}^n \log k$, így most az $f(x) = \log x$ függvényre alkalmazzuk az Euler-formulát:

$$\sum_{k=1}^n \log k = \int_1^n \log x dx + \frac{1}{2} \log n - \int_1^n p(x) \frac{1}{x} dx.$$

Itt $\log x$ integrálja könnyen meghatározható, mert

$$(x \log x - x)' = \log x,$$

tehát a *Newton-Leibniz*-formula szerint

$$\sum_{k=1}^n \log k = n \log n - n + 1 + \frac{1}{2} \log n - \int_1^n \frac{p(x)}{x} dx.$$

Mint már az előző pontban is láttuk, parciális integrálással

$$- \int_1^n p(x) \frac{1}{x} dx = \int_1^n q(x) \frac{1}{x^2} dx,$$

és a jobb oldalon megint monoton növekedő korlátos sorozat áll, tehát létezik a $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n q(x) \frac{1}{x^2} dx = \int_1^\infty \frac{q(x)}{x^2} dx$ véges

határérték. Bevezetve a $K = 1 + \int_1^\infty q(x) \frac{1}{x^2} dx$ jelölést, végül is a

$$\log(n!) = \sum_{k=1}^n \log k = \left(n + \frac{1}{2}\right) \log n - n + K - \int_n^\infty q(x) \frac{1}{x^2} dx$$

képletre jutunk. Ebből

$$n! = \frac{n^n}{e^n} \sqrt{n} e^K \cdot e^{-\int_n^\infty \frac{q(x)}{x^2} dx}.$$

Mivel itt

$$\int_n^\infty \frac{q(x)}{x^2} dx < \frac{1}{8} \int_n^\infty \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{8n} \rightarrow 0, \quad \text{ha } n \rightarrow \infty,$$

ezért

$$e^{-\int_n^\infty q(x) \cdot \frac{1}{x^2} dx} \rightarrow 1,$$

azaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n! \frac{e^n}{n^n \sqrt{n} e^K} = 1.$$

Ezt a tényt úgy fejezzük ki, hogy $n!$ *aszimptotikusan egyenlő* az $\frac{n^n}{e^n} \sqrt{n} e^K$ mennyiséggel.

A rejtélyes e^K állandó értéke kiszámítható, az eredmény a még rejtélyesebb:

$$e^K = \sqrt{2\pi}$$

összefüggés, de ennek részleteire most nem térünk ki.

Végül is a Stirling-formula néven ismert $n! \approx \frac{n^n}{e^n} \sqrt{2\pi n}$ aszimptotikus egyenlőséget, vagy az

$$n! = \frac{n^n}{e^n} \sqrt{2\pi n} e^{-\int_n^\infty q(x) \frac{1}{x^2} dx}$$

pontos egyenlőséget kapjuk, ennek segítségével pedig $n!$ igen jól és gyorsan számolható. Vegyük például a $100!$ számot. Zsebkalkulátorral is kiszámolható, hogy

$$e^{10} \approx 2,718283^{10} \approx 2,2 \cdot 10^4.$$

Ezért

$$e^{100} \approx (2,2)^{10} \cdot 10^{40} \approx 2,6 \cdot 10^{43}.$$

Ebből

$$\frac{100^{100}}{e^{100}} = \frac{10^{200}}{e^{100}} \approx \frac{10}{2,6} \cdot 10^{199-43} \approx 3,8 \cdot 10^{156}.$$

Végül

$$\sqrt{2\pi 100} \cdot 3,8 \cdot 10^{156} \approx 9,6 \cdot 10^{157}.$$

A $100!$ tehát 157 jegyű szám a 10-es számrendszerben.

5. Hatványösszegek vizsgálata

Foglalkozunk végül azzal a kérdéssel, hogyan összegezzük pozitív egész számok hatványait. Ha a $\sum_{k=1}^n k$ összeg meghatározásakor alkalmazzuk Euler képletét az $f(x) = x$ függvényre, akkor nyilván

$$\sum_{k=1}^n k = \sum_{k=0}^n k = \int_0^n x dx + \frac{1}{2}n - \int_0^n p(x) dx = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Az eredmény közismert, mint ahogyan a négyzetek összegére vonatkozó formula is az, de lássuk megint, hogyan működik a módszer:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n k^2 &= \sum_{k=0}^n k^2 = \int_0^n x^2 dx + \frac{1}{2}n^2 - \int_0^n p(x)2x dx = \frac{n^3}{3} + \frac{1}{2}n^2 + \int_0^n q(x) \cdot 2 dx = \\ &= \frac{n^3}{3} + \frac{1}{2}n^2 + 2n \int_0^1 q(x) dx.\end{aligned}$$

Definíció szerint $q(x) = \int_0^x \left([t] - t + \frac{1}{2} \right) dt$ és így $0 \leq x \leq 1$ esetén

$$q(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{2} - t \right) dt = \left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}t^2 \right]_0^x = \frac{1}{2}(x - x^2),$$

tehát

$$\int_0^1 q(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{2}(x - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

Ezt visszahelyettesítve

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Az Euler-képlet előnye itt az elemi megfontolásokkal szemben elsősorban az, hogy módszeresen vezet el a kívánt összegek kiszámításához, így elvárható, hogy pl. az 5-ik hatványok összegét, a $\sum_{k=1}^n k^5$ számot is meghatározhatjuk vele:

$$\sum_{k=1}^n k^5 = \sum_{k=0}^n k^5 = \int_0^n x^5 dx + \frac{1}{2}n^5 - \int_0^n p(x) \cdot 5x^4 dx.$$

Hogyan számítsuk most ki az $\int_0^n p(x)5x^4 dx$ maradéktagot? A $\sum_{k=1}^n k$ összegnél a maradéktag zérus volt, a $\sum_{k=1}^n k^2$ összegnél pedig – a már korábban is bevált – parciális integrálást alkalmaztuk. Ezt tesszük a továbbiakban is, ismételt parciális integrálással megszabadítjuk az integrált az x^4 tényezőtől. Ehhez célszerű lesz a p függvény számára egy eltolt integrálfüggvényt választani. A $q(x) = \int_0^x p(t) dt$ függvény ugyanis nem örökli a p azon tulajdonságát, hogy a tengely

feletti és a tengely alatti részei kiegyenlítik egymást és így $\int_0^1 p(x) dx = 0$. Fentebb már láttuk, hogy $\int_0^1 q(x) dx = \frac{1}{12}$.

Módosítsuk q -t, vezessük be a $p_2(x) = q(x) - \frac{1}{12}$ függvényt. Ekkor még mindig igaz (a $(0, 1)$ intervallumon) a $p'_2(x) = p(x)$ összefüggés és persze $\int_0^1 p_2(x) dx = 0$.

Folytassuk ezt az eljárást, definiáljuk rekurzióval a

$$p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x), \dots \quad (0 \leq x \leq 1)$$

függvénysorozatot a következő módon.

Legyen $p_1 = p$, $p_2 = q - \frac{1}{12}$, és általában, ha p_n már definiált ($n \geq 0$), akkor legyen p_{n+1} olyan függvény, amelyre

$$p'_{n+1}(x) = p_n(x) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

és

$$\int_0^1 p_{n+1}(x) dx = 0.$$

E két feltétel egyértelműen meghatározza a p_{n+1} függvényt. Jegyezzük meg, hogy a $q_{n+1}(x) = \int_0^x p_n(t) dt$ integrálfüggvénnyel kifejezve

$$p_{n+1}(x) = q_{n+1}(x) - \int_0^1 q_{n+1}(x) dx.$$

Teljes indukcióval azonnal világos, hogy p_n n -edfokú polinom $[0, 1]$ -en és mivel

$$0 = \int_0^1 p_{n-1}(x) dx = p_n(1) - p_n(0), \quad (n \geq 2)$$

ezért $p_n(1) = p_n(0)$ ($n \geq 2$). Így aztán mindegyik p_n ($n \geq 2$) folytonosan és periodikusan kiterjeszthető az egész számegyenesre.

Az imént definiált p_n függvények az ún. *Bernoulli-polinomok* (bár csupán a $[0, 1]$ szakaszon polinomok). Számítsuk ki a sorozat néhány tagját. Láttuk, $0 \leq x \leq 1$ esetén

$$p_1(x) = -x + \frac{1}{2}, \quad p_2(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}.$$

Ekkor

$$p_3(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{12}x + c$$

és

$$0 = \int_0^1 p_3(x) dx = \left[-\frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{24} + cx \right]_0^1 = c,$$

tehát

$$p_3(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{12}x.$$

Ezután

$$p_4(x) = -\frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{24}x^2 + c$$

és

$$0 = \int_0^1 p_4(x) dx = \left[-\frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{48}x^4 - \frac{1}{72}x^3 + cx \right]_0^1 = -\frac{1}{120} + \frac{1}{48} - \frac{1}{72} + c,$$

tehát

$$c = \frac{6 - 15 + 10}{720} = \frac{1}{720},$$

és így

$$p_4(x) = -\frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{24}x^2 + \frac{1}{720}.$$

Még egy lépéssel továbbhaladva

$$p_5(x) = -\frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{48}x^4 - \frac{1}{72}x^3 + \frac{1}{720}x + c,$$

$$\begin{aligned} 0 = \int_0^1 p_5(x) dx &= \left[-\frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{240}x^5 - \frac{1}{288}x^4 + \frac{1}{1440}x^2 + cx \right]_0^1 = \\ &= \frac{-2 + 6 - 5 + 1}{1440} + c = c, \end{aligned}$$

tehát

$$p_5(x) = -\frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{48}x^4 - \frac{1}{72}x^3 + \frac{1}{720}x.$$

Észrevehetjük, hogy p_3 és p_5 konstans tagja zérus, és teljes indukcióval igazolható, hogy ez minden páratlan indexű Bernoulli-polinomra igaz (az $n = 1$ eset kivételével), azaz $p_{2n+1}(0) = p_{2n+1}(1) = 0$ ($n = 1, 2, \dots$). Ebből a periodikus kiterjesztés miatt a $p_{2n+1}(k) = 0$ bármely k egész számra. Térjünk most már vissza az $\int_0^n p(x) 5x^4 dx$ integrál kiszámítására.

$$\begin{aligned} 5 \int_0^n p(x)x^4 dx &= 5 \int_0^n p_1(x)x^4 dx = 5[p_2(x)x^4]_0^n - 5 \cdot 4 \cdot \int_0^n p_2(x)x^3 dx = \\ &= -\frac{5}{12}n^4 - 20 \int_0^n p_2(x)x^3 dx, \end{aligned}$$

hiszen $p_2(0) = p_2(1) = \dots = p_2(n) = -\frac{1}{12}$ a periodikus kiterjesztés miatt. Folytassuk a parciális integrálást:

$$\begin{aligned} -20 \int_0^n p_2(x)x^3 dx &= -20[p_3(x)x^3]_0^n - (-20) \cdot 3 \int_0^n p_3(x)x^2 dx = \\ &= 60 \int_0^n p_3(x)x^2 dx, \end{aligned}$$

hiszen $p_3(0) = p_3(1) = \dots = p_3(n) = 0$. Ismét parciális integrálással

$$\begin{aligned} 60 \int_0^n p_3(x)x^2 dx &= 60[p_4(x)x^2]_0^n - 60 \cdot 2 \int_0^n p_4(x)x dx = \\ &= 60[p_4(x)x^2]_0^n - 60 \cdot 2 \cdot [p_5(x)x]_0^n + 60 \cdot 2 \cdot \int_0^n p_5(x) dx = 60p_4(n)n^2 = \frac{60}{720}n^2, \end{aligned}$$

hiszen

$$p_4(n) = p_4(0) = \frac{1}{720} \quad \text{és} \quad p_5(n) = p_5(0) = 0.$$

Végül azt kapjuk, hogy

$$5 \int_0^n p(x)x^4 dx = -\frac{5}{12}n^4 + \frac{1}{12}n^2,$$

tehát

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k^5 &= \int_0^n x^5 dx + \frac{1}{2}n^5 - \int_0^n p(x)5x^4 dx = \frac{n^6}{6} + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2 = \\ &= \frac{2n^6 + 6n^5 + 5n^4 - n^2}{12} = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2 + 2n - 1)}{12} \end{aligned}$$

lesz a keresett összegző formula.

A fenti példán már jól látszik az általános módszer: A $\sum_{k=1}^n k^j$ összeg kiszámításához fel kell írni a $p_1(x), \dots, p_j(x)$

Bernoulli polinomokat és az $\int_0^n p(x)jx^{j-1}dx$ integrál ismételt parciális integrálással a $p_i(n)$ számok ismeretében könnyen meghatározható.

Természetesen az ismételt parciális integrálással adódó képlet az $\int_0^n p(x)f'(x)dx$ általános esetre is felírható (ha f

kellően sokszor differenciálható), és így az Euler-képlet finomított alakjához jutunk, melyben a maradéktag $\int_0^n p_k(x)f^{(k)}(x)dx$

alakú integrál lesz. Ezeket a képleteket már nem írjuk le (az olvasó maga könnyen megteheti), most csupán megemlítjük, hogy mind az Euler-képlet (1) alatti alapesetének, mind pedig a finomított változatnak igen sok további érdekes alkalmazása van.