

1. Feladat. Legyen d 2-től, 5-től és 13-tól különböző pozitív egész szám. Bizonyítsuk be, hogy a $\{2, 5, 13, d\}$ halmaznak van két különböző a, b eleme, amelyre $ab - 1$ nem négyzetszám.

Megoldás. Elegendő belátni a következő állítást: ha d pozitív egész szám, akkor a $2d - 1$, $5d - 1$ és $13d - 1$ számok közül valamelyik nem négyzetszám. Tegyük fel ugyanis ennek ellenkezőjét, vagyis hogy alkalmas a, b, c pozitív egész számokkal

$$(1) \quad 2d - 1 = a^2$$

$$(2) \quad 5d - 1 = b^2$$

$$(3) \quad 13d - 1 = c^2.$$

(1)-ből leolvasható, hogy a páratlan. Ekkor a^2 4-gyel osztva 1-maradékos, és így d is páratlan. Most (2)-t és (3)-at tekintve adódik, hogy b és c páros. Vonjuk le (3)-ból (2)-t:

$$(4) \quad 8d = c^2 - b^2,$$

$$(5) \quad 2d = \frac{c+b}{2} \cdot \frac{c-b}{2}.$$

Ha b és c közül egyik 4-gyel osztható, másik pedig 2 maradékos, akkor (5) jobb oldalának mindkét tényezője páratlan, ez tehát nem lehet. Ha viszont b és c 4-gyel osztva ugyanazt a maradékos adja, akkor (5) mindkét tényezője páros, amiből d páros volta következik. Ez az ellentmondás igazolja állításunkat.

(Benczúr András)

2. feladat. Adott az $A_1A_2A_3$ háromszög és a síkjában levő P_0 pont. Defináljuk $s > 4$ esetén az A_s pontot így: $A_s = A_{s-3}$. A P_{n+1} pontot úgy nyerjük, hogy a P_n pontot A_{n+1} körül az óramutató járásával megegyező irányban 120° -kal elforgatjuk. Bizonyítsuk be, hogy ha P_{1986} és P_0 megegyező pontok, akkor az $A_1A_2A_3$ háromszög szabályos.

1986-11-356-1.eps

Megoldás. Vizsgáljuk meg először azt, hogy három egymást követő elforgatás során mi történik az $\overrightarrow{A_1P_0}$ vektorral. Bármelyik elforgatás a vektor irányát 120° -kal változtatja, hosszát pedig megtartja. Így ha a három elforgatás utáni A'_1P_3 képét tekintjük, akkor $\overrightarrow{A_1P_0} = \overrightarrow{A'_1P_3}$ adódik. Tehát $A_1P_0P_3A'_1$ négyszög paralelogramma, $\overrightarrow{P_0P_3} = \overrightarrow{A_1A'_1}$. Hasonló gondolatmenettel adódik $\overrightarrow{P_3P_6} = \overrightarrow{A_1A'_1}$, általában $\overrightarrow{P_{3k}P_{3k+3}} = \overrightarrow{A_1A'_1}$ minden k természetes számra. Ezért $\overrightarrow{P_0P_{1986}} = \overrightarrow{P_0P_3} + \overrightarrow{P_3P_6} + \dots + \overrightarrow{P_{1983}P_{1986}} = 662 \cdot \overrightarrow{A_1A'_1}$, tehát, mivel $P_0 = P_{1986}$, $\overrightarrow{P_0P_{1986}}$ és így $\overrightarrow{A_1A'_1}$ is nullvektor, vagyis A_1 megegyezik A'_1 -vel.

Most kövessük nyomon azt, hogyan nyerjük A'_1 -t A_1 -ből. Az A_1 körüli elforgatás helyben hagyja A_1 -et, majd az A_2 körüli 120° -os elforgatás A'_1 -be viszi. A'_1 -t pedig az A_3 körüli (az előzővel megegyező irányú) elforgatás viszi $A_1 = A'_1$ -be. Ezért $A_1A_2A'_1A_3$ négyszög rombusz, melynek A_2 -nél levő szöge 120° -os, így A_1 -nél 60° -os szöge van. Tehát az $A_1A_2A_3$ háromszög, melynek A_1A_2 és A_1A_3 oldalai egyenlők, valóban szabályos.

(Lipták László)

3. feladat. Egy szabályos ötszög csúcsaihoz egy-egy egész számot rendelünk úgy, hogy összegük pozitív legyen. Megengedett a következő művelet: ha három szomszédos csúcs X, Y, Z és a hozzájuk rendelt számok x, y, z , és $y < 0$, akkor az x, y, z számok helyére ugyanilyen sorrendben az $x+y, -y, z+y$ számokat írjuk. Ezt a műveletet ismételtetjük addig, amíg csak található negatív y . Döntsük el, vajon minden esetben véget ér-e az eljárás véges sok lépés után!

Megoldás. Az eljárás véges sok lépés után minden esetben véget ér, függetlenül attól, hogy milyen sorrendben végezzük el a lépéseket. Legyen az ötszög csúcsaihoz rendelt öt szám kezdetben a_0, b_0, c_0, d_0, e_0 , az n -edik „művelet” elvégzése után pedig a_n, b_n, c_n, d_n, e_n . Világos, hogy bármely lépés után a számok egészek maradnak, és összegük nem változik, tehát pozitív marad. Defináljuk az S_n nem-negatív egész számot így:

$$S_n = (a_n - c_n)^2 + (b_n - d_n)^2 + (c_n - e_n)^2 + (d_n - a_n)^+ (e_n - b_n)^2.$$

Ha valamely k természetes számra az a_k, b_k, c_k, d_k, e_k számok között van negatív (mondjuk $c_k < 0$), akkor a következő lépés után nyert $a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = b_k + c_k, c_{k+1} = -c_k, d_{k+1} = d_k + c_k, e_{k+1} = e_k$ számokra $S_{k+1} < S_k$. Ugyanis behelyettesítéssel

$$S_{k+1} - S_k = 2c_k(a_k + b_k + c_k + d_k + e_k),$$

és itt $c_k < 0, a_k + b_k + c_k + d_k + e_k > 0$, mint azt már említettük. Ez pedig azt jelenti, hogy $S_0, S_1, S_2, \dots$ szigorúan csökkenő nem negatív egész számok. Így sorozatuk csak véges hosszúságú lehet, vagyis az eljárás véges sok lépésben mindig véget ér.

4. feladat. Legyenek A és B egy O középpontú szabályos n -szög ($n \geq 5$) szomszédos csúcsai. Egy, az OAB háromszöggel egybevágó XYZ háromszöggel először befedjük OAB -t, majd az X pontot úgy mozgatjuk – mindig az n -szög belsejében –, hogy közben az Y és Z pontok állandóan az n -szög oldalain legyenek. Milyen alakzatot ír le X , ha Y befutja az n -szög határát (kerületét)?

1986-11-357-1.eps

Megoldás. Állítjuk, hogy a keresett ponthalmaz n darab zárt szakaszból áll, amelyek hossza $OB \left(\frac{1}{\cos \frac{\pi}{n}} - 1 \right)$,

és amelyek az n -szög csúcsait O -val összekötő szakaszok O -n túli meghosszabbításai.

Ha Y és Z két szomszédos csúccsal esik egybe, akkor $X \equiv O$; a többi esetben X két szomszédos oldal által határolt kisebbik szögtartományban helyezkedik el (ennek igazolásától most eltekintünk).

Legyen most Y az AB , Z pedig a vele szomszédos BC oldal belső pontja. Ekkor $YBZ \sphericalangle = ABC \sphericalangle = \pi - \frac{2\pi}{n}$, $YXZ \sphericalangle = \frac{2\pi}{n}$, a két szög összege tehát π , vagyis az $XYBZ$ négyszög húrnégyszög. Mivel $XY = XZ$, az XYB és XBZ szögekhez egyenlő ívek tartoznak, ezért $XY \sphericalangle = XBZ \sphericalangle$; az X pont az $YBZ \sphericalangle = ABC \sphericalangle$ szögfelezőjén helyezkedik el.

Vizsgáljuk most meg, mekkora lehet a BZ távolság! Először belátjuk, hogy $BX > OB$. Ugyanis $XYB \sphericalangle + XZB \sphericalangle = \pi$, így közülük az egyik legalább $\frac{\pi}{2}$, mondjuk $XZB \sphericalangle \geq \frac{\pi}{2}$. De $XBZ \sphericalangle < \frac{\pi}{2}$, ezért az XZB háromszögben ezen szögekkel szemben fekvő oldalakra $BX > XZ$ adódik $XZB \sphericalangle > XBZ \sphericalangle$ miatt. És itt $XZ = OB$. Másodszor BX szakasz hosszára felső becslés az $XYBZ$ húrnégyszög köré írható kör átmérője. Ez pedig a szinusz-tétel segítségével

$$\frac{YZ}{\sin YXZ \sphericalangle} = \frac{OB}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} \right)} = \frac{OB}{\cos \frac{\pi}{n}}.$$

Ehhez hozzávéve a megoldás elején említett $X \equiv A$, $Y \equiv B$, $Z \equiv O$ esetet,

$$0 \leq OX \leq \frac{OB}{\cos \frac{\pi}{n}} - OB = OB \left(\frac{1}{\cos \frac{\pi}{n}} - 1 \right)$$

adódik. Ha pedig gondolatmenetünket elvégezzük a többi szomszédos oldalpárra is, akkor kiderül, hogy X csakis a megoldás elején leírt ponthalmaz pontja lehet.

Hátravan még annak igazolása, hogy az említett halmaz minden pontja megfelelő. Legyen X' a BO félegyenesen úgy, hogy $OB < BX' \leq \frac{OB}{\cos \frac{\pi}{n}}$. Rajzoljuk meg a B -n és X' -n átmenő, $\frac{OB}{\cos \frac{\pi}{n}}$ átmérőjű körök valamelyikét (ha $BX' = \frac{OB}{\cos \frac{\pi}{n}}$, akkor csak egy ilyen van). Az olvasóra bízunk annak igazolását, hogy ez a kör metszi az AB és BC szakaszokat. Jelöljük ezen metszéspontokat Y' -vel és Z' -vel. Mivel $Y'BX' \sphericalangle = X'BZ' \sphericalangle$, azért $X'Y' = X'Z'$. Másrészt mivel $X'Y'BZ'$ négyszög húrnégyszög, $Y'X'Z' \sphericalangle = \pi - Y'BZ' \sphericalangle = \frac{2\pi}{n}$. Ezért az $X'Y'Z'$ háromszög hasonló az ABO háromszöghöz, körülírt köreik pedig ugyanakkorák, ezért a két háromszög egybevágó. Ez a meggondolás bizonyítja, hogy a megadott ponthalmaz minden pontja jó.

(Kós Géza)

5. feladat. Határozzuk meg az összes olyan f függvényt, amely a nem-negatív valós számok R_0^+ halmazán van értelmezve, csak nem-negatív valós értéket vesz fel és teljesíti a következő három feltételt:

- (a) $f(x \cdot f(y)) \cdot f(y) = f(x + y)$ minden $x, y \in R_0^+$ esetén;
- (b) $f(2) = 0$;
- (c) $f(x) \neq 0$, ha $0 \leq x < 2$.

Megoldás. Először két egyszerű megállapítást teszünk. Egyrészt $f(0) = 1$, hiszen az (a) feltételt $x = y = 0$ esetén alkalmazva $f(0) = f(0 \cdot f(0)) \cdot f(0) =$

$= f(0)^2$, tehát $f(0)$ értéke csak 0 vagy 1 lehet, de az első lehetőséget a (c) feltétel kizárja. Másrészt $x \geq 2$ esetén $f(x) = 0$ adódik könnyen, ha az (a) feltételbe $x - 2$ és 2 értékeket írunk: $f(x) = f((x - 2) \cdot f(2)) \cdot f(2) = 0$ a (b) feltétel miatt.

Tegyük fel most, hogy $0 < x < 2$, ekkor persze $0 < 2 - x < 2$ is teljesül, és így az (a) feltételt alkalmazva a $2 - x$ és x számokra $f((2 - x) \cdot f(x)) \cdot f(x) = f(2) = 0$ adódik. Itt (c) miatt $f(x) \neq 0$, $((2 - x) \cdot f(x)) = 0$, tehát ismét csak (c)-t alkalmazva a $(2 - x) \cdot f(x) \geq 2$, $(x) \geq \frac{2}{2 - x}$ egyenlőtlenséget kapjuk. A továbbiakban belátjuk, hogy itt

egyenlőség áll. Tegyük fel ugyanis, hogy valamely $0 < y < 2$ esetén $f(y) > \frac{2}{2 - y}$, vagyis $f(y) = \frac{2}{2 - y} + d$, ahol d pozitív. Ekkor található olyan x pozitív szám, melyre $\frac{2}{f(y)} = \frac{2}{\frac{2}{2 - y} + d} < x <$

$< 2 - y$. Erre az x, y párra $x + y < 2$, tehát $f(x + y) > 0$; valamint $x \cdot f(y) > 2$, $f(x \cdot f(y)) = 0$ áll fenn. Így az (a) feltétel nem teljesül rájuk, és ez az ellentmondás mutatja, hogy valóban minden $0 < y < 2$ esetén $f(y) = \frac{2}{2 - y}$. Az eddigiek során tehát megállapítottuk, hogy a feladat feltételeinek csak a következő függvény tehet eleget:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{2 - x} & \text{ha } 0 \leq x < 2 \\ 0 & \text{ha } x \geq 2. \end{cases}$$

Most már csak azt kell megvizsgálnunk, hogy ez a függvény valóban megfelel-e a követelményeknek. Ezt azonban az olvasóra bízunk, könnyen látható, hogy ez a függvény jó.

(Bóna Miklós)

6. feladat. Adott a síkban egy véges sok rácspontból álló halmaz. Döntsük el, vajon minden esetben lehetséges-e ezek közül a pontok közül néhányat pirosra, a többit pedig fehérre színezni úgy, hogy minden olyan egyenesen, amely párhuzamos valamelyik koordináta-tengellyel, a rajta lévő piros pontok száma legfeljebb 1-gyel térjen el az ugyancsak rajta lévő fehér pontok számától.

Megoldás. A pontok számára vonatkozó teljes indukcióval bebizonyítjuk, hogy mindig létezik a kívánt színezés. Egy pont esetén az állítás nyilvánvaló. Tegyük fel tehát, hogy $n \geq 2$, és n -nél kevesebb pont esetén kiszínezhetők a pontok az előírt módon, és megadjuk az n pontnak egy megfelelő színezését.

Könnyű dolgonk van, ha található olyan P pont, melynek sorában további pont már nincs. Ekkor P -t elhagyva a megmaradt $(n - 1)$ pontot színezzük ki a megfelelő módon, és ha P oszlopában legalább annyi piros pont van, mint fehér, akkor P -t színezzük fehérre, ha eggyel több fehér pont van, mint piros, akkor pedig pirosra. Ekkor az n pontnak egy jó színezését kaptuk, hiszen P sorában és oszlopában teljesül a feltétel, a többi sorban és oszlopban pedig nem történt változás. Hasonló a helyzet, ha van olyan P pont, melynek oszlopában nincs további pont. Vizsgáljuk tehát azt a fennmaradó esetet, amikor minden pont sorában és oszlopában is van további pont. Ekkor egy tetszőleges A_1 pontból kiindulva, annak sorában választhatunk egy tőle különböző A_2 pontot, A_2 oszlopában A_3 -t, A_3 sorában A_4 -t, és így tovább felváltva. Minthogy véges sok (n) pontunk van, véges sok lépés után az $A_1, A_2, \dots$ pontsorozatban olyan tagot kell választanunk, amely már szerepelt. Legyen tehát $A_r = A_p$ ($r > p$) az első ilyen ismétlődés. Ha $r - p$ páros, akkor az $A_p, A_{p+1}, \dots, A_{r-1}$ sorozatban minden tag az egyik szomszédjával egy sorban, a másikkal egy oszlopban van (ha A_{r-1} -t és A_p -t is szomszédoknak tekintjük). Gondoljunk utána, hogy ha $r - p$ páratlan, akkor ugyanez mondható az $A_{p+1}, A_{p+2}, \dots, A_{r-1}$ sorozatról. Hagyjuk el tehát ezen sorozat pontjait, a maradékot az indukciós feltétel szerint kiszínezhetjük a kívánt módon, a sorozat pontjait pedig színezzük ezután felváltva pirosra, ill. fehérre. Ekkor az n pontnak egy jó színezését kapjuk, hiszen minden sorban és oszlopban ugyanannyival változtatjuk meg a piros, ill. fehér pontok számát. Ezzel az indukciós lépést elvégeztük, a feladat kérdésére igenlő választ adhatunk.

(Tóth Géza)