

1. A $P_0P_1 \dots P_n$ konvex $(n+1)$ -szöget $n-2$ egymást nem metsző átlóval $n-1$ háromszögre bontottuk. Bizonyítsuk be, hogy a háromszögek megszámozhatók az $1, 2, \dots, n-1$ számokkal úgy, hogy $i = 1, 2, \dots, n-1$ -re az i sorszámú háromszögnek valamelyik csúcsa P_i legyen.

I. megoldás. A feladat állítását teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha $n = 2$, akkor a $P_0P_1P_2$ háromszöget kell az 1 számmal megszámozni, és ez lehetséges, mégpedig egyféleképpen.

Tegyük most fel, hogy $n = (k-1)$ -re igaz a tétel, vagyis egy háromszögekre bontott, konvex k -szög háromszögeit meg lehet számozni a kívánt módon. Legyen $P_0P_1 \dots P_k$ egy konvex $(k+1)$ -szög, amelyiket egymást nem metsző átlók háromszögekre bontanak. Hagyjuk el a P_k csúcsot, és a belőle induló P_kP_j szakaszok helyett húzzuk meg a $P_{k-1}P_j$ szakaszokat. Ezzel a $P_0P_1 \dots P_{k-1}$ sokszög egy felosztását kaptuk átlók útján. Ezek az átlók sem metszhetik egymást, mert azok az átlók, amelyek az eredeti sokszögben is meg voltak húzva, nem metszik egymást, egy olyan $P_{k-1}P_j$ átló pedig, amelyik egy P_kP_j átló helyébe lépett, csak olyan átlót metszhetne át, amelyiknek egyik végpontja P_{k-1} és P_k közt van, ide azonban nem esik csúcsa egyik sokszögnek sem.

Az új átlók a $(k-1)$ -szöget háromszögekre bontják. Az eredeti sokszögnek azok a részháromszögei ugyanis, amelyeknek nem csúcsa P_k , szerepelnek a $(k-1)$ -szög felbontásában is. Az eredeti sokszögben van egy $P_jP_{k-1}P_k$ háromszög, ezt összehúztuk a $P_{k-1}P_j$ átlóra, a $P_iP_jP_k$ háromszögek helyébe pedig, ha $i < j < k-1$, a $P_iP_jP_{k-1}$ háromszögek lépnek. Ezek együtt hézag és átfedés nélkül kitöltik a $P_0P_1 \dots P_{k-1}$ sokszöget. Ezek a háromszögek az indukciós feltevés szerint megszámozhatók a kívánt módon az $1, 2, \dots, k-2$ számokkal.

Ezután a k -szög felbontásában azok a háromszögek, amelyek a $(k-1)$ -szög felbontásában is szerepelnek, tartsák meg sorszámukat. Ha $i < j < k-1$, és ha a $P_iP_jP_k$ háromszög fellép, akkor kapja azt a sorszámot, amit a k -szög felbontásában a $P_iP_jP_{k-1}$ háromszög kapott (ez i vagy j). Végül a $P_jP_{k-1}P_k$ háromszögnek a $k-1$ sorszám jut. Világos, hogy így minden háromszögnek van a sorszámával egyező indexű csúcsa. A $(k+1)$ -szög háromszögei is megszámozhatók tehát a kívánt módon.

Megjegyzések. 1. A bizonyítás menetét követve az is belátható, hogy mindig csak egyféleképpen végezhető el a háromszögek megszámozása a követelményeknek megfelelően.

2. Abból a feltételből, hogy egy konvex m -szöget egymást nem metsző átlók háromszögekre bontanak, következik, hogy $m-3$ átlóval $m-2$ háromszögre van felosztva a sokszög. Valóban, minden átló meghúzása 1-gyel növeli a részsokszögek számát, a részsokszögek oldalainak együttes száma pedig 2-vel szaporodik, mert a korábbi oldalakon kívül a meghúzott átló is oldallal lesz két sokszögnek. Ha tehát k átló meghúzása után csupa háromszög keletkezett, akkor egyfelől $k-1$ háromszög keletkezett $3k+3$ oldallal, másfelől a keletkezett részsokszögek oldalainak együttes száma $m+2k$. Ebből következik állításunk. Ezeknek a részadatoknak a kiszámítása azonban fölöslegesen terhelte volna a megoldásra rendelkezésre álló időt.

3. Más lehetőségek is kínálkoztak indukciós bizonyításra. Ezeket csak röviden jelezzük.

a) Fogalmazzuk az indukciós feltételt úgy, hogy a k -nál kisebb n -ekre igaz az állítás. Egy $(k+1)$ -szög felbontásában szerepel egy $P_0P_jP_k$ háromszög. Ennek a j sorszámot kell kapnia. Maradt két k -nál nem több oldalú sokszög, vagy esetleg csak egy, ezeknek a háromszögeit az indukciós feltevés felhasználásával meg tudjuk a kívánt módon számozni.

b) Könnyen látható, hogy P_0 és P_n legalább egyikéből indul ki átló. Egy ilyen két részsokszögre bontva, azok részháromszögei az indukciós feltétel felhasználásával megszámozhatók a kívánt módon.

c) Többet azt bizonyították be, hogy van legalább két olyan csúcs, amelyikből nem indul ki átló. Ennél valamivel többet is állíthatunk. Egy ilyen „átlómentes” csúccsal szomszédos csúcsokat átlónak kell összekötnie, ha a sokszög háromszögekre van bontva (amiből következik az is, hogy két szomszédos csúcs nem lehet egyszerre átlómentes). Nevezzzük a keletkező háromszöget szélsőnek és jelöljük a szélső háromszögek számát s -sel. Ezeknek két oldala sokszögoldal, a harmadik átló. Lesz $n+1-2s$ olyan háromszög, amelyeknek egy oldala sokszögoldal, kettő átló, és lehetnek olyan háromszögek is, amelyeknek mindegyik oldala átló. Az utóbbiak számát jelöljük b -vel. Ekkor

$$3b + 2(n + 1 - 2s) + s = 2(n + 1) - 3(s - b)$$

az átlók kétszeres számát adja, vagyis $(2n-4)$ -et. Innen

$$s = (b + 2)$$

adódik, vagyis a szélső háromszögek száma 2-vel nagyobb a „belső” háromszögekénél, tehát legalább 2.

Két szélső háromszög „középső” (átlómentes) csúcsa közül legalább az egyik különbözik P_0 -tól is, P_n -től is. Egy ilyen háromszög csak a középső csúcs sorszámát kaphatja. Egy ilyen háromszöget elhagyva a maradék sokszög háromszögeit meg tudjuk számozni az indukciós feltétel alapján a kívánt módon.

Adhatunk közvetlen utasítást is a háromszögek megszámozására.

II. megoldás. Adjuk a felosztásban szereplő $P_iP_jP_k$ háromszögnek, ha $i < j < k$, a j számot. Ezzel minden háromszög kapott számot. Az is világos, hogy mindegyiknek a száma legalább 1 és legfeljebb $n-1$. Elég tehát még azt belátni, hogy két háromszög nem kaphatta ugyanazt a sorszámot.

Ha a fenti $P_iP_jP_k$ háromszögon kívül még valamelyiknek csúcsa P_j , akkor ennek nem lehet csúcsa a sokszög kerületének P_k -tól P_0 -on át P_i -ig menő részén, mert az azt P_j -vel összekötő átló metszené P_iP_k -t. Nem lehet egy ilyen háromszögnek egy csúcsa a kerület P_iP_j részén, egy pedig a P_jP_k részen, mert az ezeket összekötő átló metszené P_iP_j -t is, P_jP_k -t is. Ekkor azonban P_j a kérdéses háromszögnek vagy legkisebb indexű csúcsa, vagy a legnagyobb indexű, s így a háromszög j -től különböző sorszámot kap. Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

Megjegyzés. A feladat állítása igaz marad akkor is, ha tetszés szerinti sorrendben írjuk a csúcsok mellé a $0, 1, \dots, n$ sorszámokat. Ha egy ilyen sorszámozás mellett P_0 és P_n szomszédosak, akkor könnyen látható, hogy az állítás nem lényegesen más, mint az eredeti. Tegyük tehát fel, hogy nem szomszédosak. Ismét teljes indukcióval bizonyítunk.

Ha $n = 3$, akkor P_0 és P_3 átellenes csúcsok. Ha a négyszög a P_0P_3 átlóval van kettéosztva, akkor nyilván a $P_0P_1P_3$ háromszögnek kell az 1 számot kapnia, a másiknak a 2-t. Ha viszont a P_1P_2 átló van meghúzva, akkor bármelyik háromszög kaphatja az 1-et és a másik a 2-t.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz a legfeljebb k oldalú sokszögekre és legyenek egy háromszögekre bontott $(k+1)$ -szög csúcsai tetszés szerinti sorrendben $P_0, P_1, \dots, P_k$ -val jelölve, de P_0 és P_k ne legyen szomszédos. Ha P_0P_k szerepel az átlók között, akkor ez két olyan sokszögre osztja a $(k+1)$ -szöget, amelyek külön-külön eleget tesznek a feladat feltételeinek (csak itt már két szomszédos csúcs az, amelyeknek az indexét nem használhatjuk fel a háromszögek számozásánál), ezek háromszögei tehát megszámozhatók az indukciós feltevés szerint a kívánt módon. Ha a P_0P_k átló nincs meghúzva, akkor legyen P_i és P_j a legközelebbi csúcs P_k két oldalán, amelyik össze van kötve P_0 -val. Mivel a sokszög háromszögekre van bontva, a P_iP_j átlónak szerepelnie kell a kijelölt átlók közt. Vágjuk ketté ezzel a $(k+1)$ -szöget, és a P_0 -t tartalmazó sokszögben zárjuk még ki az i -t, a P_k -t tartalmazó sokszögben a j -t a háromszögek számozására megengedett értékek közül. Ekkor a részsokszögek háromszögei megszámozhatók az indukciós feltétel szerint a kívánt módon, és ez a számozás megfelelő lesz a $(k+1)$ -szögre is, mivel a P_0 -t tartalmazó sokszögben j -t, a P_k -t tartalmazóban pedig i -t felhasználtuk számozásra.

2. Minden n természetes számhoz vegyük n prímszám osztóinak a legnagyobb hatványát, amelyik még nem nagyobb n -nél, és ezek összegét nevezzük az n -hez tartozó hatványösszegnek. (Pl. a 100-hoz tartozó hatványösszeg $2^6 + 5^2 = 89$). Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan szám van, amelyikhez tartozó hatványösszeg nagyobb a számnál.

A versenyzők igen változatos számsorozatokot adtak meg. A legegyszerűbb talán a következő.

Megoldás. A $2^k + 2$ számok, ahol k 1-nél nagyobb egész szám, megfelelnek. Valóban, 2-nek nyilván a k -adik hatványa szerepel a hatványösszegben; továbbá van a számnak legalább egy páratlan p prím osztója, mert a szám fele 1-nél nagyobb páratlan szám. Így a hatványösszeg legalábbis $2^k + p$, ami nagyobb $2^k + 2$ -nél.

Megjegyzés. Az olvasóra bízunk annak belátását, hogy a következő számsorozatok is megfelelnek:

$2p^k$, ahol p egy (rögzített) páratlan prímszám, k pedig pozitív egész.

$3 \cdot 2^k$, $k = 1, 2, \dots$

6-nak a 2 hatványait követő legkisebb többszörösei. Hasonlóan megfelelnek 10-nek a 2 ötödiknél magasabb hatványait követő többszörösei is.

A páratlan prímszámok kétszeresei. Itt természetesen felhasználjuk már azt, hogy végtelen sok prímszám van (és ezek a 2 kivételével páratlanok).

A 30 többszörösei.

Az utolsó választás megfelelő volta abból adódik, hogy ha egy n szám osztható a p prímszámmal, és a hatványösszegben p^k szerepel, ez azt jelenti, hogy

$$p^k \leq n < p^{k+1}.$$

Innen

$$p^k > \frac{n}{p}.$$

Ha tehát n osztható 30-cal, akkor a 2, 3 és 5 adaléka a hatványösszeghez több, mint

$$\frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \frac{n}{5} = \frac{31}{30}n.$$

Ismeretes az is, hogy a prímszámok reciprok értékeinek az összege tetszés szerinti nagy lehet, ha elég sok prímszámot veszünk.¹ Ez esetünkben azt is adja, hogy a hatványösszeg nemcsak a számnál, hanem annak tetszés szerint adott többszörösénél is végtelen sok számra nagyobb lehet.

3. Egy háromszög csúcsait tükröztük a velük szemközti oldalegyenesekre. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott három pont által alkotott háromszög területe kisebb az eredeti háromszög területének ötszörösénél.

A feladat megoldását, azon túl, hogy nem könnyű alkalmas kifejezést találni a kérdéses terület meghatározására, nehezíti az is, hogy nem elegendő egy ábrára hagyatkozni, lényeges, hogy minden lehetséges esetre gondoljunk. Több ábrát rajzolva feltűnik az is, hogy ha a háromszög egyik szöge nagyobb 120° -nál, akkor a tükrözéssel keletkeztetett háromszög körüljárási iránya ellentétes az eredetivel. Ezért célszerű lesz előjeles területtel számolni, mint az a koordináta-geometriában szokásos.

I. megoldás. Egy ABC háromszög területét tekintsük pozitívnak vagy negatívnak aszerint, amint a háromszöget a csúcsok megadott sorrendje szerint körüljárva, az óramutató járásával ellentétes vagy azzal egyező irányban haladunk.

1986-02-053-1.eps

1. ábra

Ekkor végignézzve a lehetséges eseteket (1. ábra) látjuk – a háromszögek területét ugyanúgy jelölve, mint magát a háromszöget –, hogy a háromszög síkjának egy tetszés szerinti O pontjára fennáll a következő összefüggés:

$$(1) \quad ABC = OAB + OBC + OCA.$$

¹Lásd pl. Erdős P.–Surányi J.: Válogatott fejezetek a számelméletből, Tankönyvkiadó, Budapest, 1960. 114–122. old. (Itt 3 bizonyítás is található.)

Ha valamelyik három pont egy egyenesre esik, akkor a keletkező, egyenesszakasszá fajult „háromszög” területén természetesen 0-t értünk.

Feladatunkra térve legyen ABC egy tetszés szerinti háromszög pozitív körüljárásnak megfelelően betűzve. Jelöljük a csúcsok tükörképeit a velük szemközti oldal egyenesére rendre A_1 , B_1 , ill. C_1 -gyel (2. ábra).

1986-02-054-1.eps

2. ábra

Az $A_1B_1C_1$ háromszög területét az eredeti háromszöggel, tükörképeivel, továbbá az A_1B_1 , B_1C_1 , C_1A_1 oldalakhoz csatlakozó egy-egy háromszög területével akarjuk kifejezni. Ehhez alkalmazzuk először (1)-et az $A_1B_1C_1$ háromszögre, O -nak az A pontot választva:

$$A_1B_1C_1 = AA_1B_1 + AB_1C_1 + AC_1A_1.$$

Alkalmazzuk most (1)-et a jobb oldal első és harmadik tagjára, O -nak C -t, ill. B -t választva:

$$AA_1B_1 = CAA_1 + CA_1B_1 + CB_1A$$

$$AC_1A_1 = BAC_1 + BC_1A_1 + BA_1A.$$

Végül még a $CABA_1$ négyszöget kellene az eredeti háromszögre és tükörképére bontani. Ehhez alkalmazzuk (1)-et pl. a CAA_1 háromszögre, O -nak B -t választva:

$$CAA_1 = BCA + BAA_1 + BA_1C.$$

Adjuk össze egyenleteink bal és jobb oldalait, hagyjuk el a mind a két oldalon előforduló tagokat, továbbá a BA_1A és BAA_1 tagokat, mert ezek összege 0, hiszen ugyanannak a háromszögnek a területéről van szó egyszer pozitív, egyszer negatív előjellel. Így a következő egyenlőséghez jutottunk:

$$A_1B_1C_1 = AB_1C_1 + CA_1B_1 + CB_1A + BAC_1 + BC_1A_1 + BCA + BA_1C.$$

Itt az utolsó előtti tag az eredeti háromszög területe és vele egyenlő a harmadik, a negyedik és az utolsó tag is. Ezek ugyanis a tükrözött háromszögek területei. A tükrözés ugyan megváltoztatja a körüljárás irányát, de mindhárom esetben megfordult a betűzés sorrendje is.

Meg kell még vizsgálnunk a fennmaradt háromszögeket. Ezeknek egy-egy csúcsa közös az eredeti háromszöggel, és a körül az eredeti háromszög megfelelő szögének a háromszorosára keletkezik, de hol a háromszögön belül, hol azon kívül. Az ebből a csúcsból induló oldalak az eredeti háromszög egy-egy oldalával egyenlők. Vizsgáljuk meg közelebbről pl. az AB_1C_1 háromszöget.

Az oldalakra

$$AB_1 = AB, \quad AC_1 = AC.$$

1986-02-055-1.eps

3. ábra

A közbezárt szögre – $BAC \sphericalangle = \alpha$ jelöléssel – aszerint, hogy α 0° és 60° , vagy 60° és 120° , vagy 120° és 180° közé esik, a $B_1AC_1 \sphericalangle$ értéke (3. ábra) 3α , $360^\circ - 3\alpha$, ill. $3\alpha - 360^\circ$. A háromszög kétszeres területét mint két oldalnak és a közbezárt szög szinuszának a szorzatát írva, $2AB_1C_1$ abszolút értékére a három esetnek megfelelően

$$AB \cdot AC \sin 3\alpha, \quad AB \cdot AC \sin (360^\circ - 3\alpha) = -AB \cdot AC \sin 3\alpha,$$

ill.

$$AB \cdot AC \sin (3\alpha - 360^\circ) = AB \cdot AC \sin 3\alpha$$

adódik.

A háromszög körüljárási iránya viszont éppen a második esetben pozitív, az elsőben és a harmadikban negatív, így előjellel is helyesen adja meg a háromszög területét mind a három esetben a

$$2AB_1C_1 = -AB \cdot AC \sin 3\alpha$$

egyenlőség. Természetesen a megfelelő egyenlőség érvényes a másik két háromszögre. Jelöljük az eredeti háromszög területét t -vel, a tükrözéssel keletkezettét t_1 -gyel, a háromszög másik két szögét a szokott módon β -val és γ -val, akkor végül is a következő összefüggéshez jutottunk:

$$2t_1 = 8t - AB \cdot AC \sin 3\alpha - BC \cdot BA \sin 3\beta - CA \cdot CB \sin 3\gamma.$$

Azt kell belátnunk, hogy ez $-10t$ és $10t$ közé esik. Osszuk el mindkét oldalt $2t$ -vel, a jobb oldal második, harmadik és negyedik tagja esetében azt is a megfelelő két oldal és a közbezárt szög szinusza szorzataként írva, akkor a

$$\frac{2t_1}{2t} = 4 - \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin 3\beta}{\sin \beta} - \frac{\sin 3\gamma}{\sin \gamma}$$

arányról kell belátnunk, hogy -5 és 5 közötti érték.

Felhasználva a könnyen igazolható

$$\sin 3\varphi = 3 \sin \varphi - 4 \sin^3 \varphi$$

azonosságot, a jobb oldal a következőképpen is írható:

$$4(\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma) - 5.$$

Ebből az alsó becslés érvényessége nyilvánvaló, és az is látható, hogy az arány nem éri el a -5 értéket, de ahhoz tetszés szerint közel lehet, ha az egyik szög csak kevéssel kisebb 180° -nál, a másik kettő pedig ennek megfelelően nagyon kicsi.

Felső becsléshez alkalmazzuk 2 tagra a

$$2 \sin^2 \varphi = 1 - \cos 2\varphi,$$

majd a

$$\cos 2\varphi + \cos 2\psi = 2 \cos(\varphi + \psi) \cos(\varphi - \psi)$$

összefüggést:

$$\begin{aligned} 2 \sin^2 \alpha + 2 \sin^2 \beta &= 2 - \cos 2\alpha - \cos 2\beta = 2 - 2 \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \\ &= 2 + 2 \cos \gamma \cos(\alpha - \beta), \end{aligned}$$

mert $\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$. Fejezzük még ki $\sin^2 \gamma$ -t $\cos \gamma$ -val, akkor a becslendő kifejezés így alakítható tovább:

$$\begin{aligned} 4(\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma) - 5 &= 3 + 4 \cos \gamma \cos(\alpha - \beta) - 4 \cos^2 \gamma = \\ &= 3 + \cos^2(\alpha - \beta) - (2 \cos \gamma \cos(\alpha - \beta))^2. \end{aligned}$$

Ez a kifejezés nem nagyobb, mint 4. Egyenlő akkor lehet vele, ha $\cos^2(\alpha - \beta) = 1$, a kivonandó pedig 0. Mivel a szereplő szögek 180° -nál kisebbek, ez azt jelenti, hogy

$$\alpha = \beta \quad \text{és} \quad \cos \gamma = \frac{1}{2}, \quad \text{azaz} \quad \gamma = 60^\circ,$$

tehát a háromszög szabályos.

Eredményeinket összefoglalva a bizonyítandó állításon kicsit túlmenően azt láttuk be, hogy a t_1 előjeles terület $-5t$ és $4t$ között változik. Az alsó határt nem éri el, de ahhoz tetszés szerint közel lehet, a felső határt viszont eléri, és pedig egyedül a szabályos háromszög esetén.

Megjegyzés. A megoldás során alkalmazott területátalakítások közt szerepelt egy négyszög területének kétféle felosztása háromszögekre is. Ennek – az $ABCD$ négyszög esetén – az felel meg, hogy (1) mindkét oldalához hozzáadjuk az ACO területet. Ez a jobb oldal utolsó tagjával 0-t ad, így

$$(2) \quad ABC + ACO = OAB + OBC.$$

1986-02-056-1.eps

4. ábra

Megjegyezzük, hogy ezzel nemcsak konvex, hanem még hurkolt négyszöghöz is rendeltünk területet (4. ábra), vagyis olyanhoz, amelyiknek az oldalai metszik egymást a csúcsoktól különböző pontban is. Ez a hozzárendelt érték a csúcsok megnevezési sorrendjében történő körüljárás során pozitív irányban körüljárt rész területéből kivonva a negatív irányban körüljárt rész területét. A (2) összefüggés szerint ez esetben is mind a két lehetséges „felosztás” háromszögekre ugyanarra a területértékre vezet.

II. megoldás. Használjuk továbbra is az első megoldás jelöléseit. Tükrözzük a háromszög csúcsait a szemközti oldalszakaszok felezőpontjára is, a tükröképek legyenek A_2, B_2, C_2 . Az A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 egyenesek párhuzamosak rendre a háromszög BC, CA, AB oldalával, így egy ahhoz hasonló $\mathcal{H}'$ háromszöget alkotnak. Ezt a háromszöget az eredetiből úgy kaphatjuk meg, hogy azt a súlypontjából négyszeresére nagyítjuk. Valóban, ez a nagyítás az oldalfelező pontokat az A_2, B_2, C_2 -be viszi át – mivel a súlypont harmadolja a súlyvonalakat –, a háromszög oldalegyeneseit pedig párhuzamos egyenesekbe (5. ábra).

Az A_1A_2 szakasz megkapható úgy, hogy a BC oldal felezőpontja és a magasság talppontja közti szakaszt A -ból kétszeresére nagyítjuk. $\mathcal{H}'$ -ben viszont az A_2 oldalflező pont és a magasságtalppont közti szakasz négyszer akkora, mint az eredeti háromszögben, tehát A_1 $\mathcal{H}'$ -ben az oldalflező pont és a magasságtalppont közti szakasz felezőpontja.

Észrevételünket a következő egyszerű segédétel ismételt alkalmazásával fogjuk hasznosítani: Legyen az IJK háromszög síkjának tetszős szerinti pontja L , és L tükörképe I -re M . Ekkor

$$(3) \quad IJK = \frac{1}{2}(LJK + MJK).$$

Mérjük a JK egyenestől a távolságot előjelesen úgy, hogy az I -t tartalmazó félsík pontjainak a távolsága legyen olyan előjelű, mint az IJK körüljárási irány, a másik félsíkban levő pontoké pedig ellenkező előjelű. Ekkor a háromszögek területe úgy számítható, mint a KJ távolság szorozva a hozzá tartozó magassággal, a magasságokra pedig érvényes a megfelelő összefüggés (6. ábra).

Jelöljük $\mathcal{H}'$ -ben az A_1, B_1, C_1 -et tartalmazó oldalakon levő magasság talppontokat rendre T_a, T_b, T_c -vel, a háromszög csúcsait pedig A_3, B_3, C_3 -mal. Ekkor, kétszer alkalmazva (3)-at

$$\begin{aligned} t_1 &= A_1B_1C_1 = \frac{1}{2}(A_2B_1C_1 + T_aB_1C_1) = \\ &= \frac{1}{4}(A_2B_2C_1 + A_2T_bC_1 + T_aB_2C_1 + T_aT_bC_1). \end{aligned}$$

Itt $A_2B_2C_1 = A_2B_2C_2$, mert C_1C_2 párhuzamos A_2B_2 -vel, az utóbbi háromszög pedig az ABC háromszög kétszeres nagysága, területe tehát $4t$. A többi háromszöget (3) alapján tovább bontva

$$t_1 = t + \frac{1}{8}(A_2T_bC_2 + A_2T_bT_c + T_aB_2C_2 + T_aB_2T_c + T_aT_bC_2 + T_aT_bT_c).$$

Itt az első és a harmadik tag ismét $A_2B_2C_2$ -vel egyenlő, mert $T_bB_2 \parallel A_2C_2$ és $T_aA_2 \parallel B_2C_2$. Az utolsó tag a háromszög talpponti háromszögének területe, ez az eredeti háromszög t_0 talpponti háromszöge területének 16-szorosa. A maradék három háromszög egy-egy csúcsa oldalflezőpont, így ezeket tovább alakíthatjuk (3) alapján:

$$t_1 = 2t + 2t_0 + \frac{1}{16}(B_3T_bT_c + C_3T_bT_c + T_aC_3T_c + T_aA_3T_c + T_aT_bA_3 + T_aT_bB_3).$$

A zárójel első és utolsó tagja, továbbá a maradék két-két szomszédos tagpár egy-egy négyszög területét adja. Ezeket (2) alapján a másik átlójukkal osztva ketté,

$$\begin{aligned} B_3T_aT_b + B_3T_bT_c &= T_cB_3T_a + T_cT_aT_b, \\ C_3T_bT_c + C_3T_cT_a &= T_aC_3T_b + T_aT_bT_c, \\ A_3T_cT_a + A_3T_aT_b &= T_bA_3T_c + T_bT_cT_a. \end{aligned}$$

A bal oldalak összege a zárójel 6 tagját adja, a jobb oldalak első oszlopa és egyszer a talpponti háromszög pedig $\mathcal{H}'$ -t, aminek a területe $16t$. Kétszer $\mathcal{H}'$ talpponti háromszögéé $32t_0$, így végül a következő összefüggést kaptuk:

$$t_1 = 3t + 4t_0.$$

Az ABC háromszöget pozitív körüljárás szerint betűztük meg, a talpponti háromszög körüljárási iránya azonban hegyesszögű háromszög esetén pozitív, tompaszögű háromszögnél viszont negatív.²Azt kell tehát belátnunk, hogy t_0 értéke $t/2$ és $-2t$ közé esik.

Hegyeszögű ABC háromszögnek legyen az A -nál levő szöge a legnagyobb vagy a legnagyobbak egyike. A BC, CA, AB oldalakon levő magasságtalppont legyen rendre T_1, T_2, T_3 . A T_1 -en át AB -vel és AC -vel húzott párhuzamosak a T_1DAE paralelogrammát metszik ki a háromszögből (7. ábra). Ez tartalmazza a talpponti háromszöget. Ez azért igaz, mert ABT_1T_2 és ACT_1T_3 húrnégyszög, s így mindkettő T_1 -nél levő külső szöge a BAC <-gel egyenlő, a két párhuzamos tehát az egyiknek, ill. a másiknak a szögteréhez tartozik. Ekkor azonban T_2 az AD , T_3 az AE szakaszon van.

² A derékszögű háromszögnél két magasságtalppont egybeesik a derékszögű csúcsban, így $t_0 = 0$, tehát ezekre t_1 mindig $3t$, amit könnyű közvetlenül belátni. (Ez a tény vezetett egyébként a feladathoz.)

Legyen $T_1C \leq T_1B$. Ekkor mérjük rá DT_1 meghosszabbítására a vele egyenlő T_1F szakaszt. Az F -en át T_1E -vel párhuzamosan húzott egyenes messe AB -t G -ben. Az $ADFG$ paralelogrammának a háromszögön túlnyúló része egybevágó a T_1CD háromszöggel, így a paralelogramma területe nem nagyobb a háromszögénél. A T_1DAE paralelogramma és az általa tartalmazott talpponti háromszög területe tehát nem nagyobb, mint $t/2$.

Ha az ABC háromszögben A -nál tompaszög van, akkor a talpponti háromszög $T_1T_2T_3$ sorrendben történő körüljárása ellenkező irányú, mint az ABC háromszögé. (8. ábra).

A terület abszolút értékét nézve a T_2AT_3 háromszög hasonló BAC -hez és kisebb nála, mert az utóbbinak az egyik oldala a kör átmérője. Az AT_2T_1 , AT_3T_1 háromszögek területe kisebb a velük közös oldalú ABT_1 , ill. ACT_1 háromszögekénél, mert a közös oldalhoz tartozó magasságok az utóbbi háromszögekben nagyobbak. Ebben az esetben tehát a talpponti háromszög területe kisebb a háromszög területének kétszeresénél. Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

Megjegyzések. 1. Ez a megoldás is szolgáltatja az I. megoldásban nyert pontosabb eredményt. Egy paralelogrammába írt háromszög területe ugyanis nem nagyobb, mint a paralelogramma területének a fele, és akkora csak úgy lehet, ha a háromszög két csúcsa a paralelogramma két szomszédos csúcsa, a harmadik csúcs pedig az ezek közti oldallal szemközti oldalon van. Ebből következik, hogy hegyesszögű háromszög talpponti háromszögének a területe nem nagyobb a háromszög területének a negyedénél, és könnyen látható, hogy egyenlő egyedül a szabályos háromszög esetén lesz.

Tompaszögű háromszög esetében viszont látható a bizonyításból, hogy a talpponti háromszög területe közel lehet $2t$ -hez, ha T_2 és T_3 közel van B -hez, ill. C -hez, de azt nem érheti el.

2. Megoldhatjuk a feladatot koordináta geometria segítségével is. Választhatjuk pl. a BC oldal egyenesét X -tengelynek és az A -ból rábocsátott merőlegest Y -tengelynek. Célszerű továbbá a B -ből és C -ből induló magasságok talppontjai koordinátaival fejezni ki B és C tükörképét. Ezúton eljuthatunk akár az I., akár a II. megoldásban nyert területformulához.

3. Azok számára, akik ismerik a vektorok vektoriális szorzatát, vázolunk egy ezt felhasználó megoldást. A $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ vektor vektoriális szorzatán, $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ -n azt a vektort értjük a térben, amelyiknek hossza a vektorok meghatározta paralelogramma területe, iránya merőleges a két vektor síkjára és annak arra az oldalára mutat, amelyikről nézve $\mathbf{v}_1$ pozitív irányban forgatható 180° -nál kisebb szöggel $\mathbf{v}_2$ -be. Ez a művelet nem kommutatív, hiszen a tényezőik felcserélésével előjelet vált. Előjelet vált a szorzat akkor is, ha az egyik vektort az ellentettjével helyettesítjük. Ennek megfelelően, ha mindkét vektor előjelét megváltoztatjuk, vagy az egyik előjelét változtatjuk és a tényezőket megcseréljük, akkor a vektoriális szorzat értéke nem változik. Azt kell még tudni róla, hogy disztributív:

$$\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_3 \quad \text{és} \quad (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) \times \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1.$$

Az $A_1B_1C_1$ háromszög kétszeres területét az $\overrightarrow{A_1B_1} \times \overrightarrow{A_1C_1}$ szorzat adja. A tényezőket így határozhatjuk meg:

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{CB_1} - \overrightarrow{CA_1} = 2(\overrightarrow{CT_2} - \overrightarrow{CT_1}) + \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{T_1T_2} + \overrightarrow{BA},$$

mert pl. $\overrightarrow{CA_1} + \overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{CT_1}$ (9. ábra).

Hasonlóan $\overrightarrow{A_1C_1} = 2\overrightarrow{T_1T_3} + \overrightarrow{CA}$, és így a kettőt tagonként összeszorozva $2t_1$ -et a következő vektorok előjeles hosszának összege adja – az $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ -vel egy irányba mutató vektorok hosszát tekintve pozitívnak, az azzal ellentétes irányúakét negatívnak

$$4\overrightarrow{T_1T_2} \times \overrightarrow{T_1T_3} + 2\overrightarrow{T_1T_2} \times \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{T_1T_3} + \overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{CA}.$$

Az első tag $8t_0$, az utolsó $2t$. A közbülső kettőben az oldalt a rajta levő talpponttal osztva a

$$\overrightarrow{T_1T_2} \times \overrightarrow{CT_2} + \overrightarrow{T_1T_2} \times \overrightarrow{T_2A} + \overrightarrow{BT_3} \times \overrightarrow{T_1T_3} + \overrightarrow{T_3A} \times \overrightarrow{T_1T_3}$$

összeg kétszeresét kapjuk. Az összeg egyes tagjai a T_2T_1C , T_2AT_1 , T_3BT_1 , T_3T_1A háromszögek kétszeres területét adják, ezeknek az összege pedig az ABC háromszög területe (10. ábra). Ezeket figyelembe véve a $t_1 = 4t_0 + 3t$ formulához jutunk.

A koordinátákkal felírható területformula tagjait alkalmasan csoportosítva ugyanezeknek a háromszögeknek a területeit ismerhetjük fel.

4. Volt, aki az A_1B_1 , B_1C_1 , C_1A_1 oldalak négyzetét fejezte ki az oldalakkal és a szögek háromszorosaival, és helyettesítette be a Heron-formulába. Ezen az úton is el lehet jutni – elég fáradságosan – az I. megoldás formulájához.