

A múlt havi számunkban kitűzött feladatok egyikében a következő játék szerepelt: Egy ötször ötös négyzetrács minden pontjában van egy lámpácska, amely nyomógombként is működik. Ha valamelyik gombot megnyomjuk, akkor az ebben levő lámpa, valamint mindazok, amelyek a megnyomott gombbal oldal mentén szomszédosak, állapotot váltanak, tehát amelyik korábban égett, az a nyomás hatására elalszik, amelyik pedig korábban nem égett, az kigyullad. Kezdetben egyetlen lámpa sem világít. Elérhetjük-e, hogy valamennyi lámpa világítson, illetve, hogy csak a bal alsó sarokban levő lámpa égjen?

Ez a játék számos érdekes matematikai problémát vet fel. Ebben a cikkben ezek egy részével foglalkozunk.

Először is vegyük észre, hogy egy adott lámpa a játék végén akkor és csakis akkor fog világítani, ha a játék során páratlan sok szomszédját nyomtuk meg, önmagát is beleértve. Ebből látszik, hogy ha egy gombot a játék során kétszer is megnyomunk, akkor a végeredményen nem változtat, ha mindkét nyomást elhagyjuk. Eszerint feltehető, hogy minden gombot legfeljebb egyszer nyomunk meg. Észrevételünkből látszik, hogy a lenyomások sorrendje sem befolyásolja a végeredményt. Így tehát minden próbálkozás lényegében egyértelműen leírható úgy, hogy az egyes gombokról megmondjuk, hogy megnyomjuk-e őket vagy sem.

Ezek alapján bevezethetjük a következő jelöléseket. Jelöljük a gombokat (és egyben a lámpákat is) $a_1, a_2, \dots, a_{25}$ -tel az 1. ábra szerint. Egy X lenyomásmintát ezután az $x_1, x_2, \dots, x_{25}$ számokkal írunk le, ahol $x_i = 1$ akkor, ha az a_i gombot megnyomjuk, és 0 akkor, ha nem. Minden X lenyomás minta egyértelműen meghatároz egy Y világításmintát, amit hasonlóan írhatunk le az $y_1, y_2, \dots, y_{25}$ számokkal, azaz $y_i = 1$, ha az X lenyomás minta lenyomása után az a_i lámpa ég, és 0, ha nem.

1986-04-145-1.eps

1. ábra

Valamennyi lámpa kigyújtása olyan X lenyomás minta meghatározását jelenti, amelynek megfelelő világítás mintában minden i -re $y_i = 1$. Vegyük észre, hogy ha egy lenyomás minta első sorát (tehát az x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 számokat) tetszőlegesen lerögzítjük, akkor a lenyomás minta második sorának elemeit már csak egyféleképpen választhatjuk meg úgy, hogy a világítás minta első sorában minden lámpa égjen. Ezután már a lenyomás minta harmadik sora is csak egyféle lehet, ha azt akarjuk, hogy a világítás minta második sorában is égjenek a lámpák. Továbbmenve, a lenyomás minta negyedik, majd ötödik sora is hasonlóképpen egyértelmű, és ezután már több szabadságunk nincs: az adott $(x_1, \dots, x_5)$ kezdet csak egyféleképpen folytatható úgy, hogy a kapott lenyomás mintához tartozó világítás mintában az első négy sor minden lámpája égjen, és ezzel az is egyértelműen van meghatározva, hogy az ötödik sorban mely lámpák égnének és melyek nem.

Ha tehát a fenti kitöltést valamennyi lehetséges $(x_1, \dots, x_5)$ szám ötösre elvégezzük, akkor megkapjuk az összes olyan lenyomás mintát, amikor a megfelelő világítás mintában az első négy sor összes lámpája ég. Ilyen kezdő számötös $2^5 = 32$ van (mivel minden x_i egymástól függetlenül lehet 0 vagy 1). E 32 kezdősor végigpróbálása után négy olyan lenyomás mintát kapunk, aminek megfelelő világítás mintában az utolsó sor lámpái is égnének. Ezek (2. ábra) tehát a kitűzött feladat *b)* részének összes megoldásai. (Az ábrán látható, hogy a megoldások egymás elforgatottjai.)

1986-04-145-2.eps

2. ábra

Ha már az ember kezében vannak a lámpácskák, kíváncsi rá, hogy elkészíthető-e tetszőleges világítás minta. Abból, hogy négy különböző lenyomás minta is ugyanazt a (csupa 1-esből álló) világítás mintát adja, azonnal következik, hogy van olyan világítás minta, amelyet egyetlen lenyomás minta sem hoz létre, hiszen az összes világítás minták száma ugyanannyi, mint az összes lenyomás minták száma: 2^{25} . Azonban ennél többet is mondhatunk.

Nevezzük két lenyomás minta összegének azt a lenyomás mintát, amit a két minta egymás utáni végrehajtásaként kapunk a bevezetőben említett egyszerűsítés figyelembevételével. Az összegben tehát akkor kell megnyomnunk egy gombot, ha ezt a gombot az összeadandó minták közül pontosan az egyikben nyomjuk meg. A lenyomás mintákat jellemző 0–1 sorozatok nyelvén ez éppen az elemenként vett, modulo 2 összeadást jelenti. Az is látszik, hogy lenyomás minták összege a megfelelő világítás minták összegét gyűjtja ki.

Ha most páronként összeadjuk a 2. ábra lenyomás mintáit, akkor olyan lenyomás mintákat kapunk eredményül, amelyek hatására egyetlen lámpa sem világít.

Nevezzük az ilyen lenyomás mintákat *0-lenyomás mintáknak*. A 2. ábra négy mintája között $\binom{4}{2} = 6$ -féle összeadás végezhető el, de az összegek közül csak három különböző. Ezek a 0-lenyomás minták láthatók a 3. ábrán. Ha ehhez a három mintához még hozzávesszük a triviális 0-lenyomás mintát is (amikor egyetlen gombot sem nyomunk le), akkor egyelőre 4 különböző 0-lenyomás mintánk van. Megmutatjuk, hogy több 0-lenyomás minta nincs.

1986-04-146-1.eps

3. ábra

Ha egy X mintához hozzáadunk egy 0-lenyomásmintát, akkor az eredményként kapott lenyomásmintához tartozó világítás minta ugyanaz lesz, mint az X -hez tartozó. Ha tehát lenne még egy ötödik 0-lenyomás minta is, akkor azt hozzáadva a 2. ábra (pl.) első megoldásához, szintén megoldást kellene kapnunk. Azt viszont már tudjuk, hogy a feladat összes megoldása a 2. ábrán látható, így tehát az összeadás eredményeként a 2. ábra valamelyik másik mintáját kell megkapnunk. Mivel a minták összeadása asszociatív, és tetszőleges X és X' mintára $(X + X') + X' = X$, a 2. ábra két szóban forgó mintájának összege az új, ötödik 0 lenyomás minta. Az ilyen összeadások eredményei azonban a 3. ábrán láthatók, ötödik 0-lenyomás minta tehát valóban nem létezik.

Az eddigiekből következik, hogy ha egy világítás minta előállítható, akkor az pontosan négyféleképpen állítható elő: úgy, hogy az öt előállító bármely lenyomásmintához hozzáadjuk a 0-lenyomás mintákat. Eszerint a 2^{25} -féle világítás mintának legfeljebb az $1/4$ -e lehet kigyújtható. A valóban kigyújtható minták száma azonban nem lehet ennél kevesebb sem, mert egyébként volna olyan minta, amelyet a 2^{25} darab lenyomás minta közül négynél több állítana elő.

Nyitva maradt persze a kérdés, hogy miképpen lehetne valahogy egyszerűen jellemezni 2^{23} darab valóban előállítható mintát. Ezzel kapcsolatos a kitűzött feladat a) része.

A kérdés vizsgálatához próbáljuk meg a játékot a „negyedére korlátozni”, azaz tekintsük azt a játékot, amely csak az $a_1, a_2, \dots, a_{23}$ lámpákból áll, és nézzük meg, hogy ennek megoldásai hogyan hatnak a_{24} -re és a_{25} -re. Az eredeti feladat megoldásához hasonlóan megmutatható, hogy a 23-lámpás játékban csak a triviális 0-lenyomás minta létezik, és így minden világítás minta valóban létre is hozható.¹

A 23-lámpás játékban tehát minden a_i gombhoz van olyan lenyomás minta (még hozzá egyetlen), amelyik csak az a_i lámpát gyújtja ki. Most vizsgáljuk meg, hogy ezek a 23-gombos lenyomás minták hogyan hatnak az eredeti játék a_{24} és a_{25} lámpáira. A 4. ábrán látható például az a lenyomás minta, ami a 23-lámpás játékon csak az a_1 -et gyújtja ki. Látható, hogy a 25-lámpás játékon ez a minta nem gyújtja ki a_{24} -et, de kigyújtja a_{25} -öt.² (Az ábrán aláhúzással jelöltük a kigyújtott lámpákat.)

1986-04-147-1.eps

4. ábra

Készítsük el ezután a következő táblázatot. a_{25} helyére írjunk 1-et, a_{24} helyére pedig 2-et. A többi a_i helyére írjunk 0-t, ha a 23-lámpás játékban az egyedül a_i -t kigyújtó lenyomás minta a 25-lámpás játékban a_{24} és a_{25} egyikét sem gyújtja ki; 1-et, ha csak a_{25} -öt gyújtja ki; 2-t, ha csak a_{24} -et, és 3-at, ha mindkettőt kigyújtja. Az így kapott táblázat az 5. ábrán látható, és valamiképpen a 23-lámpás játék hatását írja le az elhagyott két lámpán.

1986-04-147-2.eps

5. ábra

Most vizsgáljuk meg, hogy a 25-lámpás játékban egy gomb lenyomása hogyan változtatja meg a 0, 1, 2, ill. 3-mal jelölt mezők közül azoknak a paritását, amelyek éppen világítanak. A táblázat szimmetriái miatt elég az 1, 2, 3, 6, 7, 8, 11, 12, 13 számú gombokat vizsgálni. A 3. és 11. gomb egyik szám paritását sem változtatja meg, ezt jelöljük így: (0, 0, 0, 0). Az 1. gomb nem változtatja meg a 0-k paritását, de a többiekét igen, ezt jelöljük így: (0, 1, 1, 1). A 2. és 6. gombok hatása: (1, 1, 1, 1), a többieké pedig: (1, 0, 0, 0). Vegyük észre, hogy valamennyi gomb hatása (a, b, b, b) alakú!

Ez azt jelenti, hogy az üres mintából kiindulva csak azok a világítás minták lehetnek kigyújthatók, amelyekben a táblázatban 1-es, 2-es, ill. 3-as helyeken levő égő lámpák száma azonos paritású, hiszen az üres mintában is ez a helyzet. Az ilyen minták viszont ki is gyújthatók, hisz „23-lámpás részüket” a 23-as játékban egyesével kigyújtva, az 5 táblázat kódjainak jelentése szerint a_{24} és a_{25} állapota éppen megfelelő. Ez valóban az összes minták negyedrésze, mivel ha az első 23 lámpára tetszőlegesen megadjuk, hogy égjen-e vagy sem, azzal a világító 3-asok paritását már meghatároztuk. Ezután a 24. és 25. lámpát összesen négyféleképpen állíthatjuk még be, de ebből egyetlenegy beállítás lesz olyan, amikor a világító 1-esek és a 2-esek paritása megegyezik a 3-asok (már adott) paritásával. Az 5. ábra táblázata tehát mintegy „kulcsként” használható annak gyors eldöntésére, hogy egy világítás minta létrehozható-e vagy sem. A kitűzött feladat a) részére így tagadó a válasz, hiszen az egyetlen világító lámpa a_{21} , így a világító 1-esek paritása 1, a többieké pedig 0. Az is látszik, hogy az önmagukban kigyújtható lámpák a 0-jelűek, a_7, a_9, a_{13}, a_{17} és a_{19} .

Amikor az ember valódi játékot tervez a lámpácskák ötletéből, igyekszik minél többféle játéklehetőséggel felruházni a készítenő fizikai eszközt. Az egyik bővítési lehetőség az, ha a játékosnak különböző, „véletlen” kezdőalakzatokból kiindulva kell – minél kevesebb lépésben – meggyújtania valamennyi lámpát. Természetesen valamennyi kezdőalakzatról biztosítani kell a megoldhatóságot. Az 5. ábra táblázata lehetőséget ad ilyen alakzatok gyors generálására.

A feladatot mégsem így oldottuk meg, mert ahhoz, hogy annak idején a játék olcsón gyártható legyen, minél kisebb mikroprocesszort kellett alkalmazni; végül az összes funkció belefért egy 1K-s négy bites chip-be. A „véletlen”

¹ Bonyolultabb, lineáris algebrai eszközökkel közvetlenül, általánosan is igazolható, hogy a kigyújtható minták száma pontosan az összes minták száma, osztva a 0-lenyomás minták számával.

² Természetesen a 23-lámpás feladat megoldását célszerű számítógéppel számolni.

kezdőállásokat úgy hoztuk létre, hogy kiválasztottunk egy adott kezdőállást és 16 lépést: amikor a játékos a véletlen kezdőállást kéri, a gép ezt a 16 lépést hajtja végre (ötösével ciklikusan). A játékba így csak 32 „véletlen” kezdőállás van beépítve – ez gyakorlati szempontból elég, és a program is belefért az 1K-ba. Az adott kezdőállást és a 16 lépést viszont sikerült úgy megválasztanunk, hogy egyik „véletlen” kezdőállást sem lehet 6-nál kevesebb lépésben megoldani.

Egy játék értékét az is növeli, ha többféleképpen is játszhatunk vele. Például módosítjuk a szomszédságokat: egy gomb lenyomása nem a tényleges szomszédok állapotát változtatja meg. A következő tétel garantálja, hogy a játéknak igen általános feltételek mellett is van megoldása, azaz valamennyi lámpa kigyújtható. A valódi játékba mi egy olyan lehetőséget is bevettünk, hogy az egyes gombok lenyomása után azok a lámpák váltsanak állapotot, ahova az adott gombon álló sakkszár el tudna ugrani. Ennek a változatnak az elemzését az olvasóra hagyjuk és visszatérünk az általános játék vizsgálatára.

*

Játsszuk a játékot az $a_1, \dots, a_n$ gombok A_n halmazán, és tegyük fel, hogy minden a_i gombhoz hozzá van rendelve egy U_i halmaz úgy, hogy az a_i gombot lenyomva az U_i halmaz elemei váltanak állapotot. Az U_i halmazokról a következőket tesszük fel:

- a) Minden i -re $a_i \in U_i$.
- b) Minden i, j párra, ha $a_i \in U_j$, akkor $a_j \in U_i$.

Ez a két feltétel az eredeti játékra – és a lóugrásos változatra is – nyilván teljesül. Most bebizonyítjuk a következő tételt:

Tétel. A fenti játéknak mindig van megoldása, azaz létezik A_n -nek olyan H részhalmaza, hogy H elemeit megnyomva minden a_i lámpa állapotot vált.

Bizonyítás. A bizonyítást n -re vonatkozó teljes indukcióval végezzük. $n = 1$ -re a tétel nyilvánvalóan igaz. Tegyük fel, hogy a tétel igaz $n - 1$ lámpa esetre, és tekintsük az n lámpás játékot az A_n gombokon.

Ha n páros, akkor minden a_i lámpa esetre vizsgáljuk meg azt az $n - 1$ lámpás játékot, amelyet az $A_n - \{a_i\}$ gombokkal játszunk úgy, hogy minden U halmazból elhagyjuk a_i -t, az U halmazok közül pedig U_i -t. Erre a játékra is nyilván teljesülnek az a) és b) feltételek, így az indukciós feltevés szerint ennek a játéknak van megoldása. Ha a megoldó lenyomásmintát végrehajtjuk A_n -en, és az ott kigyújtja az a_i lámpát is, akkor készen vagyunk. Ha egyetlen a_i -re sem gyújtja ki a_i -t, akkor egymás után hajtsuk végre az összes $(n - 1)$ -lámpás játék megoldásaként kapott lenyomásmintát az A_n halmazon. Ennek során minden lámpa $(n - 1)$ -szer, azaz páratlan sokszor vált állapotot, tehát a kapott n darab lenyomás minta összege megoldása az n -lámpás játéknak.

Ha n páratlan, akkor először is belátjuk, hogy létezik olyan U_i halmaz, amelynek az elemszáma páratlan. Ez következik abból, hogy a $\sum_{i=1}^n |U_i|$ összeg páratlan, ami azért igaz, mert ebben az összegben az a) feltétel miatt minden a_i lámpát egyszer magában U_i -ben számolunk (ez tehát egy páratlan összeg), a továbbiakban pedig ha egy a_i lámpát számolunk egy U_j -ben, akkor a b) feltétel szerint az a_i lámpát is számoljuk U_i -ben, tehát a további leszámolások párba állíthatók.

Vegyünk most egy olyan a_i gombot, amihez páratlan elemszámú U_i tartozik. Most csak ennek az U_i halmaznak az elemeire végezzük el azt a gondolatmenetet, amit páros esetben az A_n minden elemére elvégeztünk. Ha egyetlen $(n - 1)$ -lámpás megoldás sem gyújtja ki az elhagyott lámpát, akkor a kapott $|U_i|$ számú lenyomásmintát egymás után végrehajtva az A_n halmaz minden U_i -n kívüli eleme páratlan sokszor vált állapotot, az U_i halmaz elemei pedig eggyel kevesebbszer, azaz páros sokszor. Ha ezután még az a_i gombot is lenyomjuk, akkor U_i elemei még egyszer állapotot váltanak, így ebben az esetben is megoldáshoz jutottunk. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Ha az a) vagy a b) feltételt elhagyjuk, akkor már mutatható ellenpélda, azaz olyan játék, amelynek nincs megoldása. A b) feltételt elhagyva nagyon egyszerű ellenpélda a következő: három gombunk van, a , b és c . Az a lámpa kigyújtja önmagát és b -t; a b lámpa kigyújtja önmagát és c -t; a c lámpa pedig önmagát és a -t. Könnyen látható, hogy ennek a játéknak nincs megoldása.

Az a) feltétel elhagyása esetén ellenpélda az eredeti ötször ötös játék azzal a módosítással, hogy a lenyomott gomb csak a szomszédait gyújtja ki, önmagát nem. Közvetlenül is aránylag könnyen bebizonyítható, hogy ez a játék nem oldható meg, de például az alábbi 3. feladatból is következik: a mostani játék egy megoldása az eredeti játékban egy komplementer–kigyújtó lenne.

*

A továbbiakban még néhány érdekes feladatot sorolunk fel a lámpácskás játékkal kapcsolatban, majd egy-két eddig megoldatlan problémát is megemlítünk.

1. Bizonyítsuk be, hogy az eredeti, 5×5 -ös játékban minden létrehozható világításminta legfeljebb 15 lenyomással is előállítható.

2. Bizonyítsuk be, hogy az eredeti játék n -szer n -es négyzetre általánosított változatában mindig létezik pontosan 2^n olyan lenyomás minta, ami megegyezik az általa létrehozott világításmintával.

3. Bizonyítsuk be, hogy az n -szer n -es játékban páros n esetén pontosan 2^n olyan lenyomás minta van, amely saját komplementerét gyújtja ki; páratlan n esetén pedig nem létezik ilyen komplementer-kigyújtó.

4. Bizonyítsuk be, hogy az n -szer n -es játékok között létezik végtelen sok olyan, amiben minden világításminta létrehozható, és végtelen sok olyan is van, amelyekben nem.

Ez utolsó feladattal kapcsolatos első megoldatlan problémánk is: hogyan lehetne jellemezni azokat az n -eket, amelyekre az n -szer n -es játékban minden világításminta létrehozható. Számítógéppel 100-ig meghatároztuk az ilyen n -eket, ezek a következők:

1 2 3 6 7 8 10 12 13 15 18 20 21 22 25 26 27 28 31 36 37
 38 40 42 43 45 46 48 51 52 55 56 57 58 60 63 66 68 70 72 73 75
 76 78 80 81 82 85 86 87 88 90 91 93 96 97 100

Látható, hogy ez a sorozat meglehetősen szeszélyesen viselkedik. Mi lehet benne a szabályszerűség?

Ugyancsak nem sikerült eddig általánosítani az 1. feladat eredményét n -szer n -es játékra. (Amikor minden világításminta létrehozható, akkor természetesen n^2 a megoldás: az a világításminta, amit az összes gomb lenyomásával kapunk, ilyenkor nem hozható ki kevesebb lépésből.)