Számelmélet II.

1. Igazoljuk, hogy végtelen sok olyan egész szám van, amely felírható két köbszám különbségeként, de nem írható fel két köbszám összegeként.

2. Legyen k tetszőleges egész szám. Igazoljuk, hogy végtelen sok olyan m pozitív egész szám van, amihez találhatók ε_1, ε_2, …, ε_m számok úgy, hogy

$$k = \varepsilon_1 1^2 + \varepsilon_2 2^2 + \ldots + \varepsilon_m m^2$$

és minden $\varepsilon_j = \pm 1$.

3. Igazoljuk, hogy ha p prímszám és a, b olyan egészek, amelyekre

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p-1} = \frac{a}{b},$$

akkor $p|a$. Igaz-e az is, hogy $p^2|a$?

4. Bizonyítsuk be, hogy ha n és k pozitív egész, akkor

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+k}$$

nem lehet egész.

5. Adott a k természetes szám. Igazoljuk, hogy akkor és csak akkor van hozzá olyan a és b egész, amelyre $k = a^2+3b^2$, ha van hozzá olyan c és d egész, amelyre $k = c^2 + cd + d^2$.

6. Legyen $n > 1$, páratlan egész. Megadhatók-e $a_1, a_2, \ldots, a_n$ különböző egészek úgy, hogy az $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)+1$ polinom két kisebb fokú racionális együtthatós polinom szorzatára bomlik?
Mi a helyzet az $(x-a_1)^2 \cdot (x-a_2)^2 \ldots (x-a_n)^2 + 1$ polinommal?

7. Igazoljuk, hogy tetszőleges m természetes számhoz végtelen sok olyan k természetes szám van, amelyre megadható k egész úgy, hogy azok m-edik hatványának reciprok összege éppen 1.

8. Legyen a és b egymáshoz relatív prím pozitív egész. Hány olyan n természetes szám van, amelyre az $ax + by = n$ egyenletnek nincs nem negatív x, y egész megoldása?