

Első forduló

1. Síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben az ABC háromszög csúcspontjai: $A(0; 8)$, $B(6; 0)$ és $C(x; 12)$. Mekkora az x , ha tudjuk, hogy $0 < x < 6$, és az ABC háromszög területe 20?
2. Oldjuk meg a valós számok halmazán a

$$(1) \quad \sin^2 x = \sin y,$$

$$(2) \quad \cos^4 x = \cos y,$$

egyenletekből álló egyenletrendszert!

3. Antal, Béla, Csaba, Dezső és Elemér olyan játékot játszanak, amelyben mindegyik játékos béka vagy kenguru. A békák állításai mindig hamisak, ezzel szemben a kenguruk mindig igazat mondanak.

- (1) Antal azt mondja, hogy Béla kenguru.
- (2) Csaba azt mondja, hogy Dezső béka.
- (3) Elemér azt mondja, hogy Antal nem béka.
- (4) Béla azt mondja, hogy Csaba nem kenguru.
- (5) Dezső azt mondja, hogy Elemér és Antal különböző fajtájú állatok a játékban.

Hány béka van az öt fiú között?

4. Egy apa minden pénzét gyermekeire hagyta a következő végrendelet szerint:

a legidősebb kapjon 10 000 Ft-ot és a maradék egytized részét,

a második kapjon 20 000 Ft-ot és az új maradék egytized részét,

a harmadik kapjon 30 000 Ft-ot és az új maradék egytized részét, és így tovább. Ily módon mindegyik gyermek ugyanannyi pénzt kapott.

Hány gyermeke volt az apának?

5. Határozzuk meg az összes olyan pozitív egész számból álló x, y számpárt, amely kielégíti a

$$\frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \cdots \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1} = \frac{y^3 - 1}{y^3 + 2}$$

egyenletet!

6. Mely valós y értékek esetén teljesül az

$$x^2 \log_2 \frac{4(y+1)}{y} + 2x \log_2 \frac{2y}{y+1} + \log_2 \frac{(y+1)^2}{4y^2} > 0$$

egyenlőtlenség minden valós x -re?

7. Adjunk meg n pozitív egész számból álló halmazt úgy, hogy bármely kettőt, vagy bármely hármat, ..., vagy bármely $(n-1)$ -et választva ki a halmaz elemei közül, a kiválasztott számoknak mindig van 1-nél nagyobb közös osztójuk; de a halmaz összes elemének nincs 1-nél nagyobb közös osztója!

8. Az $SABC$ tetraéderen az ASB , BSC és CSA háromszögek egyike sem derékszögű. Az ASB lap S csúcshoz nem tartozó magasságainak talppontja A_1 és B_1 , hasonlóképpen a BSC lap S csúcshoz nem tartozó magasságainak talppontja B_2 és C_2 , végül a CSA lap S csúcshoz nem tartozó magasságainak talppontja C_3 és A_3 . Bizonyítsuk be, hogy van olyan egyenes, amely merőleges az A_1B_1 , B_2C_2 és C_3A_3 egyenesek mindegyikére!

A második forduló feladatai

I. kategória

1. Oldjuk meg az

$$\left[\frac{x-2}{3} \right] + \left[\frac{1}{x} \right] = \frac{2x^2 - 3x - 1}{x}$$

egyenletet a pozitív valós számok halmazán!

(Itt $[k]$ jelenti a valós k szám egész részét: azt a legnagyobb egész számot, amely nem nagyobb k -nál, tehát $k-1 < [k] \leq k$.)

2. Jelöljük ki az ABC háromszög belsejében egy P pontot, és a P ponton át húzzunk párhuzamosokat a háromszög oldalaival! Ezek a háromszöget három paralelogrammára és három háromszögre osztják, amelyek együttvéve (hézagmentesen és) átfedés nélkül befedik az ABC háromszöget. Hogyan kell kitűzni a P pontot, hogy a részháromszögek területének összege harmadrésze legyen az ABC háromszög területének?

3. Bizonyítsuk be, hogy ha n pozitív egész számot jelent, akkor $2^n + 3^n$ nem lehet négyzetszám!

II. kategória

1. Bizonyítsuk be, hogy ha p és q olyan pozitív számokat jelentenek, amelyeknek összege 1-gyel egyenlő, akkor

$$\left(p + \frac{1}{p} \right)^2 + \left(q + \frac{1}{q} \right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

Mely esetben érvényes az egyenlőség?

2. Adott az O középpontú és r sugarú K kör, valamint az e egyenes, amely K -t az (egymástól különböző) P és Q pontban metszi. Legyen k olyan kör, amely egyrészt kívülről érinti K -t, mégpedig a nem nagyobb PQ ív valamely belső pontjában, másrészt érinti az e egyenest!

Bizonyítsuk be, hogy a nem nagyobb PQ ív F felezőpontjából a k körhöz vont érintőszakasz hossza független k -től!

3. Az $ABCD$ tetraéder csúcspontjai egy egységnyi térfogatú egyenes körhenger határoló lapjain helyezkednek el. Bizonyítsuk be, hogy az $ABCD$ tetraéder térfogata nem nagyobb $\frac{2}{3\pi}$ -nél! Mely esetben egyenlő $\frac{2}{3\pi}$ -vel?

III. kategória

1. Bizonyítsuk be, hogy az a és b pozitív egészek $\frac{a}{b}$ hányadosa akkor és csak akkor egyenlő két természetes szám reciprokának összegével, ha van a b -nek két olyan (nem feltétlenül különböző) osztója, amelyek összege az a -nak egész számú többszöröse.

2. Legyenek A és B a k kör belsejében az O körközpontonra szimmetrikus pontok. Vegyünk fel a k körön kívül egy tetszőleges P pontot, amelynek A -tól és B -től mért távolságaira $PA \leq PB$. A PA átmérőjű t körnek a k körrel képezett metszéspontjait jelölje M és N . Igazoljuk, hogy $MPA \sphericalangle = BPN \sphericalangle$.

3. Oldjuk meg a valós számok körében a következő egyenletet:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^4}{4} + \dots + \frac{x_n^{2n}}{2^n} + \frac{1}{2^n}.$$

IV. kategória

1. Határozzuk meg az összes olyan korlátos $f : Z \rightarrow Z$ függvényt (Z az egész számok halmaza), amely minden egész k és n esetén kielégíti az

$$f(k+n) + f(k-n) = 2f(k) \cdot f(n)$$

egyenletet!

2. Adott egy háromszög a síkon. Szerkesszük meg a háromszög belsejében mindazon pontok halmazát, amelyeknek az oldalegyenesektől mért távolság összege a háromszög három magassága hosszának számtani közepe!

3. Adott n^2 különböző valós szám. Ezeket egy $n \times n$ -es táblázatban rendeztük el. Bekarikázzuk minden oszlopban a legnagyobbat és minden sorban a legkisebbet. Hány olyan elrendezés van, amelyben $2n$ különböző számot karikáztunk be?