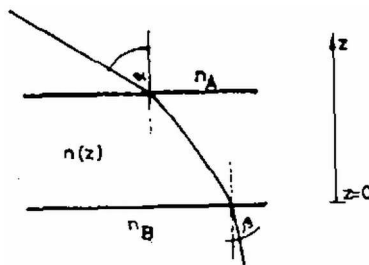


1. a) Tekintsünk egy átlátszó plánparalel lemezt! A lemez anyagának törésmutatója (n) az alsó (B) laptól mért távolság függvényében változik. Mutasd meg, hogy $n_A \sin \alpha = n_B \sin \beta$! A jelöléseket az 1. ábra tartalmazza.

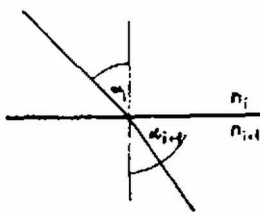


1. ábra

b) Tegyük fel, hogy egy nagy sík sivatagban állsz! Úgy látod, mintha bizonyos távolságban tőled vízfelszín volna. Ha közeledsz a „vízhez”, úgy tűnik, mintha az hátrébb menne oly módon, hogy a távolság közted és a „víz” között állandó. Magyarázd meg a jelenséget!

c) Határozd meg, hogy a b)-ben leírt jelenségnél mekkora a levegő hőmérséklete közvetlenül a talajnál! Tegyük fel, hogy a szemed 1,6 m magasan van a talaj felett, és a távolság közted és a „víz” széle között 250 m! A levegő törésmutatója 15° C-on, normál légnyomás mellett 1,000 276. Tegyük fel, hogy a levegő hőmérséklete a talajtól mért 1 m magasság felett mindenhol 30° C! A légnyomás egyenlő a normál légnyomással. Jelöljük a törésmutatót n -nel! Tegyük fel, hogy $n - 1$ arányos a levegő sűrűségével! Vizsgáljuk meg az eredmény pontosságát!

Megoldás. a) Osszuk fel a plánparalel lemezt k db egyforma vastagságú, a határfelülettel párhuzamos részre! Ha k elég nagy, akkora a törésmutatót egy ilyen vékony részben állandónak tekinthetjük. Jelöljük az i -edik részben a törésmutatót n_i -vel, továbbá $n_A = n_0$, $n_B = n_{k+1}$.



2. ábra

A 2. ábra alapján

$$\frac{\sin \alpha_i}{\sin \alpha_{i+1}} = \frac{n_{i+1}}{n_i}.$$

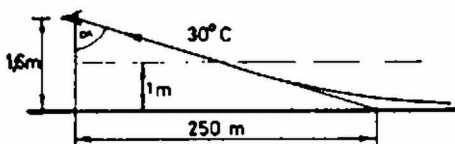
Ekkor

$$\begin{aligned} \frac{n_B}{n_A} &= \frac{n_{k+1}}{n_k} \cdot \frac{n_k}{n_{k-1}} \cdot \frac{n_{k-1}}{n_{k-2}} \cdot \dots \cdot \frac{n_1}{n_0} = \\ &= \frac{\sin \alpha_k}{\sin \alpha_{k+1}} \cdot \frac{\sin \alpha_{k-1}}{\sin \alpha_k} \cdot \dots \cdot \frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha_1} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}. \end{aligned}$$

b) A napsugárzás hatására a talaj közvetlen közelében a levegő jobban felmelegszik, mint szemmagasságban, így ott törésmutatója is kisebb. Ha a földfelszínnel elég kis szöget bezáróan nézünk lefelé, azaz elég távolra nézünk, akkor a talaj közvetlen közelében a teljes visszaverődés jelensége lép fel, és a talajon az ég kékjét mint „vizet” látjuk. Ha odébb menve a hőmérsékleti viszonyok nem változnak, a „víz” is odébb megy, hiszen a jelenséget csak bizonyos szög alatt nézve láthatjuk.

c) Jelöljük T -vel az ismeretlen hőmérsékletet! Teljes visszaverődés határesetében $\sin \alpha = n_T/n_{30}$. Tudjuk, hogy $\tan \alpha = 250 \text{ m}/1,6 \text{ m}$ (3. ábra), innen $\alpha = 89^\circ 38'$, így az előző egyenletlenségből

$$(1) \quad n_T = n_{30} \cdot 0,999\,979\,5.$$



3. ábra

A feladat szövege alapján felírhatjuk, hogy

$$(2) \quad n_T = 1 + k\rho_T; \quad n_{30} = 1 + k\rho_{30}; \quad 1,000\,276 = 1 + k\rho_{15},$$

ahol ρ a levegő sűrűsége és k állandó. Tudjuk továbbá, hogy

$$(3) \quad \rho_T \cdot (T + 273\text{ K}) = \rho_{30} \cdot 304\text{ K} = \rho_{15} \cdot 288\text{ K}.$$

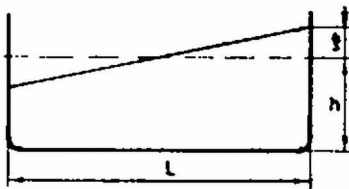
Az (1), (2), (3) összefüggésekből $T = 55,7^\circ\text{C}$.

A számolásokból felhalmozódott hiba a számológép pontossága miatt nagyon kicsi (kisebb, mint $0,1^\circ\text{C}$). A valóságban a feladatban megadott adatok közül több csak nagy hibával mérhető (pl. 250 m, 30°C), így az eredmény hibája legalább néhány $^\circ\text{C}$.

2. Egyes tavaknál időnként egy furcsa jelenséget (a vízszint periodikus változását) figyelhetjük meg – nevezzük ezt billegésnek. A jelenség általában olyan tavak esetén fordul elő, amelyek mélységükhöz viszonyítva hosszúak, valamint keskenyek. Egy tavon gyakran látunk hullámokat, azonban viszonylag ritkán fordul elő a fenti jelenség, amelynek során az egész víztömeg együtt oszcillál, hasonlóan, mint a kávé a csészében, amikor egy vendégnek visszük.

A jelenség modellezéséhez téglatest alakú edényt használunk. Az edény hossza L , a vízszint magassága h . Tegyük fel, hogy a vízszint kezdetben kis szöggel dől a vízszinteshez képest! Ezután a víz „billegni” kezd, azaz a víz felszíne állandóan sík, azonban oszcillál egy, az edény hosszának felénél levő vízszintes egyenes körül.

Dolgozz ki modellt a víz mozgására és határozz meg egy kifejezést az oszcilláció T periódusidejére! A kezdeti állapot a 4. ábrán látható. Tegyük fel, hogy $\xi \ll h$!

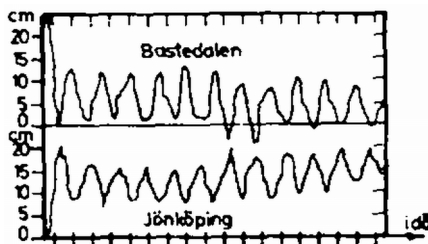


4. ábra

A következő táblázat a periódusidőt adja meg a vízmélység függvényében két különböző hosszúságú edény esetén. Megfelelő módon ellenőrizd, hogy mennyire jól írja le az általad meghatározott összefüggés a mért adatokat! Mi a véleményed a modell használhatóságáról?

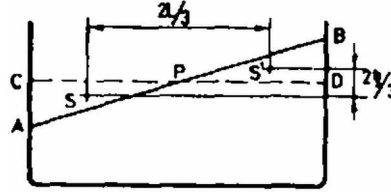
$L=479\text{ mm}$		$L=143\text{ mm}$	
h (mm)	T (s)	h (mm)	T (s)
30	1,78	31	0,52
50	1,40	38	0,48
69	1,18	58	0,43
88	1,08	67	0,35
107	1,00	124	0,28
124	0,91		
142	0,82		

Az 5. ábra a svédországi Vättern-tóra vonatkozó mérési adatokat mutat, a vízszint változását Bastedalen-nél (a Vättern-tó északi végénél) és Jönköpíngnél (déli végénél). Ez a tó 123 km hosszú és az átlagos vízmélység 50 m. Milyen a mérés időskálája?



5. ábra

Megoldás. Először határozzuk meg a víz súlypontjának vízszintes és függőleges irányú elmozdulását, Δx -et és Δy -t! A 6. ábrán látható jelöléseket használjuk.



6. ábra

Az a vízmennyiség, amely egyensúlyban a PCA háromszögben van, a billegés szélső helyzetében a PBD háromszögbe kerül, mialatt súlypontja vízszintesen $(2L/3)$ -mal, függőlegesen pedig $(2\xi/3)$ -mal elmozdul. A PCA háromszögben levő és az összes víz tömegének aránya:

$$\frac{\frac{\xi(L/2)}{2}}{Lh} = \frac{\xi}{4h}.$$

Az egész víztömeg súlypontjának elmozdulása az egyensúlyi helyzethez képest

$$(1) \quad \text{vízszintesen: } \Delta x = \frac{\xi}{4h} \cdot \frac{2L}{3} = \frac{\xi L}{6h},$$

$$(2) \quad \text{függőlegesen: } \Delta y = \frac{\xi}{4h} \cdot \frac{2\xi}{3} = \frac{\xi^2}{6h}.$$

A periódusidő meghatározása céljából a következő modellt készítjük:

1. Tegyük fel, hogy a víztömeg vízszintes mozgása harmonikus rezgőmozgás, és a víztömeg együtt mozog. Ha v -vel jelöljük a vízszintes mozgás maximális sebességét és ω -val a rezgés körfrekvenciáját, akkor a feltevés alapján

$$(3) \quad v = \Delta x \cdot \omega.$$

2. Mivel h jóval kisebb, mint L , ezért tegyük fel, hogy a billegés során, amikor a víz felszíne vízszintes, akkor az egész víztömeg vízszintesen mozog. A feltevés alapján így

$$(4) \quad (1/2)mv^2 = mg\Delta y,$$

ahol m az összes víz tömege. Az (1), (2), (3) és (4) egyenletekből

$$(5) \quad T = \frac{\pi L}{\sqrt{3hg}}.$$

Készítsük el a feladatban közölt két táblázat megfelelőjét az (5) képletből számolt periódusidővel:

$L=479$ mm	
h (mm)	T (s)
30	1,60
40	1,24
69	1,05
88	0,94
107	0,85
124	0,79
142	0,74

$L=143$ mm	
h (mm)	T (s)
31	0,47
38	0,42
58	0,34
67	0,31
124	0,24

Láthatjuk, hogy a modell alapján számított periódusidő jól követi a mért periódusidő változásait, de szisztematikusan (átlagosan 15 %-kal) kisebbek az értékek. Ezért az (5) képlet helyett a következő összefüggést használjuk a periódusidő meghatározására:

$$(6) \quad T = 1,15 \frac{\pi L}{\sqrt{3hg}}.$$

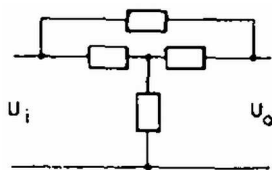
A (6) képletből számolt periódusidő hibája feltehetően 10 % alatt marad.

A periódusidő a Vättern-tó esetén a (6) összefüggésből:

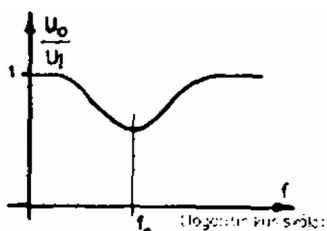
$$T = 3,2 \text{ óra.}$$

Az 5. ábra időtengelyén 19 beosztásra 12 periódus jut, így egy beosztás 2 órának felel meg kb. 10 %-os hibával.

3. Egy elektromos szűrő áramkör négy alkotóelemből áll, amint azt a 7. ábrán láthatod. A feszültségforrás belső ellenállása elhanyagolható, és a terhelés ellenállását végtelennek veheted. A szűrő áramkörnek olyannak kell lennie, hogy az U_0/U_i hányados a 8. ábrának megfelelően függjön a frekvenciától, ahol U_i a feszültségforrás feszültsége és U_0 a kimenő feszültség. Az f_0 frekvenciánál az U_i és az U_0 között a fáziskülönbségnek nullának kell lennie.



7. ábra



8. ábra

A szűrőáramkör megépítéséhez a következő alkotóelemek közül válogathatsz:

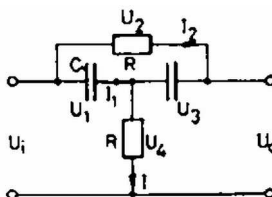
2 db 10 k Ω -os ellenállás,

2 db 10 nF-os kondenzátor,

2 db 160 mH-s tekercs. (A tekercsek nem tartalmaznak vasat és elhanyagolható ellenállásúak.)

A felsorolt alkotóelemek közül négy felhasználásával tudsz olyan szűrő áramkört készíteni, amely kielégíti az ábrákon látható feltételeket. Határozd meg az összes lehetséges kombináció esetén az f_0 frekvenciát és az U_0/U_i hányadost ennél a frekvenciánál!

Megoldás. Legyen $A(\omega) = U_0(\omega)/U_i$. Tekintsük a 9. ábra szerinti kapcsolást!



9. ábra

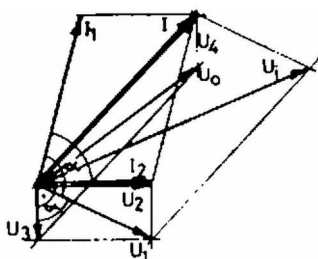
Egyenáram esetén a kondenzátorok szakadásként viselkednek, ezért $A(0) = 1$. Nagy frekvencián a kondenzátorok rövidzárként viselkednek, ezért $\lim_{\omega \rightarrow \infty} A(\omega) = 1$.

Nyilván teljesül továbbá, hogy $0 \leq A \leq 1$.

A 9. ábra jelöléseit használva felírhatjuk a következőket:

$$I_1 + I_2 = I, \quad U_2 + U_3 = U_1, \quad U_1 + U_4 = U_i, \quad U_3 + U_4 = U_0.$$

A kapcsoláshoz tartozó vektorábrát a 10. ábrán láthatjuk.



10. ábra

Jelöljük x , ill. y indexszel a vektorok vízszintes ill. függőleges komponenseit! A vektorábráról leolvasható összefüggések a következők:

$$\begin{aligned}U_{0x} &= U_{4x} = RI_x = R(I_2 + I_{1x}) = U_2 + RI_1 \cos \alpha, \\U_{0y} &= U_{4y} - U_3 = RI_1 \sin \alpha - U_2 \operatorname{ctg} \alpha, \\U_{ix} &= 2U_2 + RI_1 \cos \alpha, \\U_{iy} &= RI_1 \sin \alpha - U_2 \operatorname{ctg} \alpha, \\\operatorname{tg} \alpha &= U_2/U_3 = RC\omega, \\I_1 &= U_1 C\omega = U_2 \sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}/R.\end{aligned}$$

A fenti egyenletrendszer rendezésével:

$$\begin{aligned}U_{0x} &= 2U_2, \\U_{iy} &= U_{0y} = U_2 \left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega} \right), \\U_{ix} &= 3U_2.\end{aligned}$$

Így

$$A^2(\omega) = \frac{U_{0x}^2 + U_{0y}^2}{U_{ix}^2 + U_{iy}^2} = \frac{R^4 C^4 \omega^4 + 2R^2 C^2 \omega^2 + 1}{R^4 C^4 \omega^4 + 7R^2 C^2 \omega^2 + 1}.$$

Ezt a kifejezést ω szerint deriválva, és 0-val egyenlővé téve a következő egyenletet kapjuk:

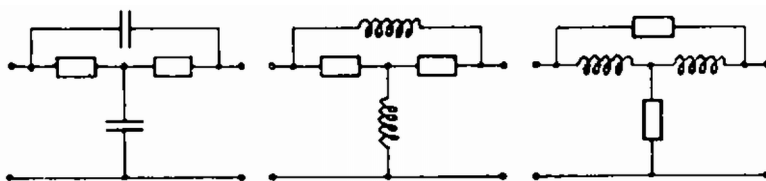
$$\omega \cdot (\omega^4 R^4 C^4 - 1) = 0.$$

Az egyenletnek az $A(\omega)$ minimumához tartozó megoldása:

$$\omega_0 = I/RC = 10^4 \text{ (1/s)}, \quad \text{így} \quad f_0 = 1,6 \text{ kHz} \quad \text{és} \quad A(\omega_0) = 2/3.$$

Ilyen frekvencia mellett $U_{iy} = U_{0y} = 0$, ezért U_i és U_0 azonos fázisban van, ahogy a feladat megkívánja.

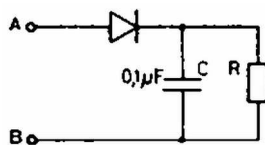
További helyes kapcsolások láthatóak a 11. ábrán. Ezekben az esetekben f_0 , $A(\omega_0)$ kiszámítása és a fázisazonosság belátása a fentihez hasonlóan végzendő. (Az Olimpián ezek elvégzése is hozzátartozott a feladat megoldásához.)



11. ábra

Mérési feladatok

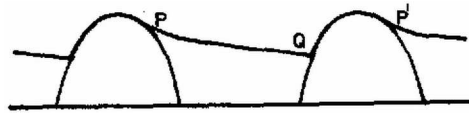
1. Adott: 1. Egy 0,20 kHz frekvenciára beállított szinuszjel generátor.
2. Egy kétsatornás oszcilloszkóp.
3. Milliméterpapír.
4. Egy dióda.
5. Egy 0,1 μF kapacitású kondenzátor.
6. Egy ismeretlen ellenállás.
7. Egy csatlakozókkal ellátott szerelőlap.
8. Vezetékek.



12. ábra

Állítsd össze a 12. ábra szerinti áramkört! Kösd az A és a B pontot a váltóáramú generátor kivezetésére! A generátor 0,20 kHz frekvenciájú. Határozd meg méréssel az R ellenálláson disszipálódó átlagos teljesítményt, amikor a generátor áramának amplitúdója 2,0 V (azaz a csúcstól csúcsig mért amplitúdó 4,0 V)!

A megoldás menete a következő: A kapcsolás összeállítása után a kondenzátor feszültségét vezessük az oszcilloszkóp bemenetére. Ekkor az oszcilloszkóp ernyőjén a 13. ábrán vastagon kihúzott vonal látható.



13. ábra

A kondenzátor feltöltése a P pontig tart (ez nem a szinusz hullám teteje), majd a P és Q pont között a kondenzátor az R ellenálláson keresztül kisül, mialatt a diódán nem folyik áram. A P és Q pont közötti görbéből a kondenzátor feszültségét leíró $U = U_0 e^{-t/RC}$ összefüggés segítségével R meghatározható. A megfelelő feszültség és idő értékeket az oszcilloszkóp ernyőjéről kell leolvasni. Több mérés elvégzése után R értékét 5 – 10 % hibán belül meg tudjuk határozni.

R meghatározása után egy teljes periódust (pl. a P és P' közötti részt) sok egyenlő részre osztva leolvashatjuk az egyes időpillanatokban a feszültség értékét. U^2 -et az idő függvényében ábrázolva, majd a kapott görbét numerikusan integrálva a $P = U^2/R$ képlet segítségével meghatározhatjuk a keresett átlagos teljesítményt. Körültekintően végezve a mérést, az eredmény hibája kb. 10 % lesz.

2. Az adott neonlámpa spektrumában a sárga-narancs-vörös tartományban számos spektrum-vonal található. A rövidebb hullámhosszú tartomány egyik sárga vonala nagyon erős. Határozd meg ennek a vonalnak a hullámhosszát! Becsüld meg, mekkora az általad mért hullámhossz pontossága!

Adott: Egy 220 V váltófeszültségre kapcsolt neonlámpa, egy ismeretlen hullámhosszú lézer, egy optikai rács, egy objektív mikrométer (amelyen egy 1 mm hosszúságú szakasz 100 részre van osztva), egy 1 m hosszú vonalzó, állvány.

Megjegyzés. Ha előre tudod valahonnan a lézer hullámhosszát, nem használhatod ezt az adatot.

A megoldás menete a következő: Az objektív mikrométerrel nem tudunk a neon fényén látható elhajlást létrehozni. Tehát a keresett hullámhossz közvetlenül nem mérhető. Ezért a következőt csináljuk: A lézer fényét a falra vetítjük, és a fénysugárra merőlegesen eléje tesszük az objektív mikrométert. Ekkor a falon jól látható az elhajlási kép. A lézer fényének hullámhosszát meghatározhatjuk az elhajlási törvényből. $\lambda = d \sin \alpha_n / n$, ahol $d = 1/100$ mm a rácsállandó, és α_n az n -edik elhajláshoz tartozó elhajlási szög. (Az $n = 3$ -hoz tartozó elhajlás is jól látható.)

A lézer hullámhosszának meghatározása után a lézer segítségével határozzuk meg az adott optikai rács rácsállandóját!

A mérést az előbbihez hasonló módon végezhetjük el. Ha a mérést gondosan végezzük, akkor 5 – 10 % hibával megkapjuk az optikai rács rácsállandóját.

Most már az optikai rács segítségével meghatározhatjuk a keresett hullámhosszt. A neonlámpa nagyon kicsi, és gyenge fényű. Ezért az optikai rácsot a szemünk elé tartva nézünk a neonlámpa felé. A lámpa egyik sarka, valamint a sárga színű elhajlási kép megfelelő sarka közötti látszólagos távolságot megmérve kiszámíthatjuk az elhajlás szögét. Ismét a fenti képletet használva kapjuk a keresett hullámhosszt kb. 10 %-os hibával.