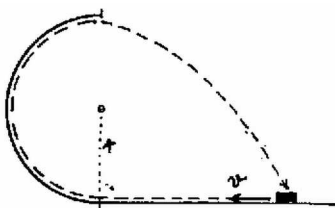


Az I. forduló feladatai

1. Egy ismeretlen hosszúságú vízszintes pálya r sugarú félkör alakú pályával folytatódik függőleges síkban (1. ábra). Egy testet megfelelő nagyságú v sebességgel úgy akarunk a pálya elejéről elindítani, hogy az végighaladva a félkörön, ugyanoda érkezzék vissza. Legalább milyen hosszúnak kell lennie a pálya vízszintes részének? A súrlódás elhanyagolható.



1. ábra

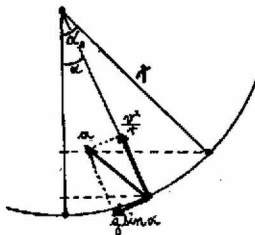
(Vermes Miklós)

Megoldás. A tetőponton legalább akkora v_0 sebesség szükséges, hogy $mv_0^2/r = mg$ alapján a test le ne essék; ez a sebesség $v_0 = \sqrt{rg}$. A tetőpontról, $2r$ magasságból történő leesés ideje $\sqrt{4r/g}$. Ez alatt a v_0 sebességgel megtett út $x = v_0 \sqrt{4r/g}$, v_0 értékét felhasználva $x = 2r$. Ez a legrövidebb távolság, mert nagyobb v_0 esetén messzebb esik le a test. (Az esés ideje ugyanannyi.)

2. Egy fonálingát 45° -os helyzetből elengedünk. Mozgás közben mely helyzetben lesz a legkisebb a gyorsulása? (Vermes Miklós)

Megoldás. Az α szöghöz tartozó helyzetben a gyorsulás érintőleges összetevője $g \sin \alpha$, a centrum felé mutató összetevője v^2/r (2. ábra). Az α helyzethez tartozó sebesség az energiamegmaradás törvényével számítható:

$$mv^2/2 = mg(r \cos \alpha - r \cos 45^\circ), \quad v^2 = 2gr(\cos \alpha - \cos 45^\circ).$$



2. ábra

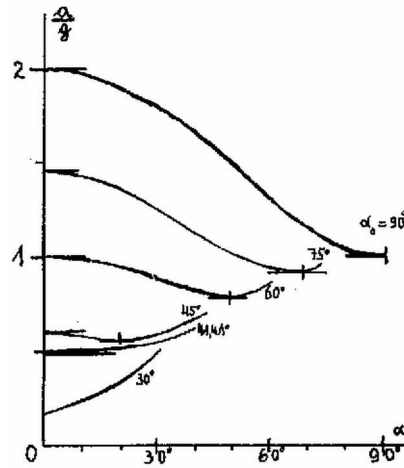
Ennek alapján a gyorsulás centrum felé mutató összetevője $2g(\cos \alpha - \sqrt{2}/2)$. A teljes gyorsulás:

$$a = g \sqrt{\sin^2 \alpha + 4(\cos \alpha - \sqrt{2}/2)^2} = g \sqrt{3 \cos^2 \alpha - 4\sqrt{2} \cos \alpha + 3}.$$

A gyorsulás akkor a legkisebb, amikor a gyökjel alatti mennyiség a legkisebb. A gyökjel alatti mennyiség $\cos \alpha$ -nak másodfokú függvénye. Mivel $ax^2 + bx + c$ az $x = -b/2a$ helyen minimális, így a gyorsulás akkor a legkisebb, ha

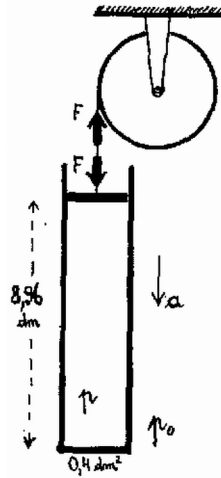
$$\cos \alpha_m = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3} = 0,9428, \quad \alpha_m = 19,47^\circ.$$

Ha az indítási szög (α_0) a függőlegetől mérve kisebb vagy egyenlő, mint $41,41^\circ = \arccos 0,75$, akkora gyorsulás $\alpha = 0$ esetén minimális. Vízszintes helyzetből történő indítás esetében a gyorsulás az indításkor a legkisebb. A különböző esetekről áttekintést nyújt a 3. ábra.



3. ábra

3. A fonálon lógó dugattyú tömege 25 kg és a héliumgázt tartalmazó hengeres edény tömege szintén 25 kg (4. ábra). A henger alapterülete $0,4 \text{ dm}^2$ és a dugattyú távolsága a henger fenekétől $8,96 \text{ dm}$. A fonál egy $0,2 \text{ m}$ sugarú, $3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ tehetetlenségi nyomatékú hengerre van felcsévélve. A gázt tartalmazó henger és a dugattyú állandó gyorsulással esnek.



4. ábra

Mennyi a hengerbe zárt héliumgáz tömege? A sűrűdés mindenütt elhanyagolható. A külső légköri levegő nyomása $p_0 = 10 \text{ N/cm}^2$, a hőmérséklet 0 C° , $g = 10 \text{ m/s}^2$.

(Vermes Miklós)

Megoldás. Jelöljük a fonálban fellépő erőt F -fel! A dugattyú és a henger között semmiféle erőhatás nincs. A hengert a belső p és a külső p_0 nyomásokból származó erő mozgatja a gyorsulással (természetesen a gázzal együtt, de a gáz tömegét most elhanyagolhatjuk):

$$25 \text{ kg} \cdot a = 250 \text{ N} - (10 \text{ N/cm}^2 - p) \cdot 40 \text{ cm}^2.$$

A dugattyút a súlyból és nyomáskülönbségből származó erő viszi lefelé, a fonálerő húzza felfelé:

$$25 \text{ kg} \cdot a = 250 \text{ N} + (10 \text{ N/cm}^2 - p) \cdot 40 \text{ cm}^2 - F.$$

A csapágyazott hengert az F fonálerő $0,2 \text{ m} \cdot F$ forgatónyomatékkal forgatja, a létrejövő szöggyorsulás $a/0,2 \text{ m}$, így a forgás törvénye szerint

$$0,2 \text{ m} \cdot F = (a/0,2 \text{ m}) \cdot 3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

A háromismeretlenes egyenletrendszer megoldása:

$$F = 300 \text{ N} \quad a = 4 \text{ m/s}^2, \quad p = 6,25 \text{ N/cm}^2.$$

Ismerve a hengerbe zárt héliumgáz nyomását és térfogatát ($0,4 \text{ dm}^2 \cdot 8,96 \text{ dm} = 3,584 \text{ dm}^3$), kiszámíthatjuk a 10 N/cm^2 nyomás mellett V_0 normáltérfogatát:

$$V_0 = \frac{6,25(\text{N/cm}^2) \cdot 3,584 \text{ dm}^3}{10 \text{ N/cm}^2} = 2,24 \text{ dm}^3$$

Ez éppen a moltérfogat tizede, tehát a héliumgáz tömege 0,4 g.

4. Egy vitorláhajó hátszéllel halad a tavon (5. ábra). A szél sebessége $v = 10$ m/s. A vitorlára ható közegellenállási erő arányos a sebesség négyzetével; az arányossági tényező $k_1 = 64$ N/(m/s)². A víz alatti részre ható közegellenállási erő szintén arányos a hajó u -val jelölt sebességének négyzetével, az arányossági tényező $k_2 = 4$ N/(m/s)². Mennyi a hajó sebessége?



5. ábra

(Lugosi Erzsébet)

Megoldás. A $v - u$ sebességű légáramlat a vitorlát $k_1(v - u)^2$ erővel nyomja. Ez az erő egyenlő a víz alatti részre ható k_2u^2 közegellenállási erővel:

$$k_1(v - u)^2 = k_2u^2.$$

Rendezve:

$$(k_1 - k_2)u^2 - 2k_1vu + k_1v^2 = 0.$$

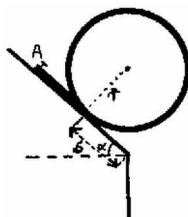
Ennek megoldása:

$$u = \frac{k_1/k_2 \pm \sqrt{k_1/k_2}}{k_1/k_2 - 1}v.$$

Az első gyök $1,33v$, a szélnél nagyobb sebességet jelent, így értelmetlen. A második gyök adja meg a helyes eredményt: $u = 0,8v = 8$ m/s.

A II. forduló feladatai

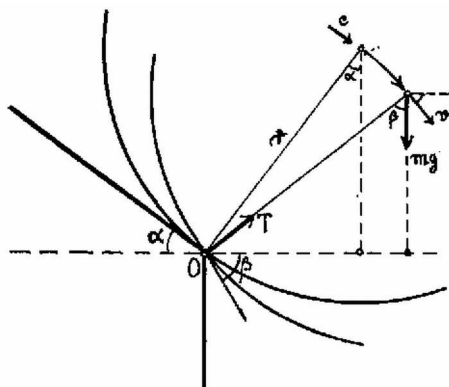
1. Egy $r = 0,3$ m sugarú tömör hengerre papírszalagot csévélünk, és ennek a végét az A pontban rögzítettük egy $\alpha = 36,87^\circ$ hajlásszögű lejtőn (6. ábra). A hengert a lejtő végétől $s = 0,16$ m távolságból elengedjük. Mekkora és milyen irányú a henger középpontjának a sebessége, amikor a henger elhagyja a lejtőt? $g = 10$ m/s².



6. ábra

(Vermes Miklós)

Megoldás. A henger középpontja c sebességgel érkezik a lejtő széléhez (7. ábra).



7. ábra

Ez a sebesség az energiamegmaradás törvényével számítható:

$$mgs \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot mc^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{mc^2}{2} = \frac{3mc^2}{4},$$

innen

$$c = \sqrt{\frac{4gs \cdot \sin \alpha}{3}} = 1,131 \text{ m/s.}$$

Ezután a henger lebillen O körül forogva. Egy bizonyos β szögű helyzetben a középpont sebessége legyen v , amelynek nagysága ismét az energiamegmaradás törvényével számítható:

$$\frac{mc^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{mc^2}{2} + mgr(\cos \alpha - \cos \beta) = \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{mv^2}{2}.$$

Innen c előbbi értékének felhasználásával:

$$v^2 = \frac{3c^2 + 4gr(\cos \alpha - \cos \beta)}{3} = \frac{4g(s \sin \alpha + r \cos \alpha - r \cos \beta)}{3}.$$

A körmozgáshoz szükséges $mr\omega^2 = mv^2/r$ nagyságú erőt a súlyerő $mg \cos \beta$ összetevőjének és a T támaszerőnek a különbsége szolgáltatja:

$$\frac{mv^2}{r} = mg \cos \beta - T.$$

Az elválás abban a β_0 szögű helyzetben történik, amikor a T támaszerő nulla, vagyis

$$mg \cos \beta_0 = \frac{mv^2}{r}.$$

A megcsúszást megakadályozza a papírszalag. Felhasználva v^2 értékét:

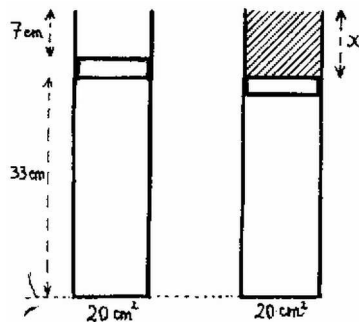
$$g \cos \beta_0 = \frac{4g(s \sin \alpha + r \cos \alpha - r \cos \beta_0)}{3r}.$$

Innen $\cos \beta_0$ (függetlenül g -től):

$$\cos \beta_0 = \frac{4g(s \sin \alpha + r \cos \alpha)}{7r} = 0,64, \quad \beta_0 = 50,21^\circ.$$

A sebesség nagysága: $v_0 = \sqrt{rg \cos \beta_0} = 1,386 \text{ m/s}$. A sebesség iránya $\beta_0 = 50,21^\circ$ -kal lefelé irányul a vízszinteshez képest. Ezzel meghatároztuk a sebesség nagyságát és irányát a lejtő elhagyásának pillanatában.

2. Egy 20 cm^2 alapterületű hengerben $7,2 \text{ kg}$ tömegű, sűrűdésmentes dugattyú zár el 33 cm magas, 0°C hőmérsékletű légoszlopot. A hengerben a dugattyú felett még 7 cm magas üres rész van. A külső légnyomás 10 N/cm^2 , a higany sűrűsége $13,6 \text{ g/cm}^3$, a bezárt levegő kezdeti sűrűsége $1,8 \text{ g/dm}^3$, állandó térfogat melletti fajhője $0,7 \text{ J/gK}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$ (8. ábra.)



8. ábra

a) Mekkora az a legnagyobb higany mennyiség, amit a dugattyú fölé tölthetünk (állandó hőmérséklet mellett)?

b) A maximális higany mennyiség betöltése után a levegőt lassan felmelegítjük, amíg az összes higany ki nem csurog. E kísérlet elvégzése közben mennyi hőt kellett a bezárt levegővel közölnünk?

(Vermes Miklós)

Megoldás. a) A dugattyú súlya által okozott nyomás $72 \text{ N}/20 \text{ cm}^2 = 3,6 \text{ N/cm}^2$. A levegő térfogata kezdetben $20 \text{ cm}^2 \cdot 33 \text{ cm} = 660 \text{ cm}^3$, nyomása $10 \text{ N/cm}^2 + 3,6 \text{ N/cm}^2 = 13,6 \text{ N/cm}^2$. Ha x magasságú higanyoszlop kerül a

dugattyú fölé, akkor a levegő térfogata $(33 \text{ cm} + 7 \text{ cm} - x) \cdot 20 \text{ cm}^2$, a levegő nyomása $[10 \text{ N/cm}^2 + 3,6 \text{ N/cm}^2 + 0,136(\text{N/cm}^3) \cdot x]$.

Boyle–Mariotte törvénye alapján

$$13,6 (\text{N/cm}^2) \cdot 660 \text{ cm}^3 = [10 \text{ N/cm}^2 + 3,6 \text{ N/cm}^2 + 0,136 (\text{N/cm}^3) \cdot x] \cdot (33 \text{ cm} + 7 \text{ cm} - x) \cdot 20 \text{ cm}^2.$$

Az egyenlet fizikailag értelmes megoldása $x = 10 \text{ cm}$. Tehát a higany térfogata 200 cm^3 , tömege 2720 g .

b) Ha ebben a folyamatban a kezdeti és végső állapotot összehasonlítjuk, változatlan nyomás mellett növekedett a levegő térfogata $(33 \cdot 20) \text{ cm}^3$ -ről $(40 \cdot 20) \text{ cm}^3$ -re. Így az utóbbi állapothoz tartozó hőmérséklet:

$$T = \frac{(40 \cdot 20) \text{ cm}^3}{(33 \cdot 20) \text{ cm}^3} \cdot 273 \text{ K} = 331 \text{ K}, \quad t = 58 \text{ }^\circ\text{C}.$$

A levegő tömegét megadja kezdeti térfogatának és sűrűségének szorzata: $0,66 \text{ dm}^3 \cdot 1,8 \text{ g/dm}^3 = 1,188 \text{ g}$. A belső energia növeléséhez szükséges hő

$$0,7 \text{ J/gK} \cdot 1,188 \text{ g} \cdot 58 \text{ K} = 48,23 \text{ J}.$$

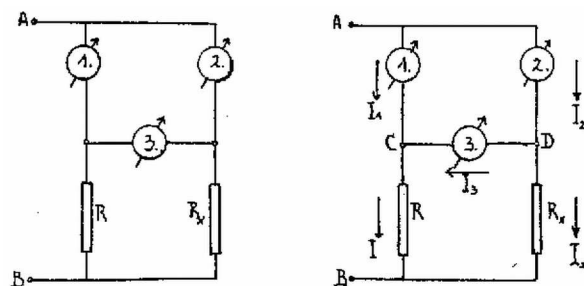
A melegítés közben a gáz nyomása

$$10 \text{ N/cm}^2 + 3,6 \text{ N/cm}^2 + 0,136 \text{ N/cm}^3 \cdot 10 \text{ cm} = 14,96 \text{ N/cm}^2$$

értékről lineárisan csökken $13,6 \text{ N/cm}^2$ -re, az átlagos nyomás $14,28 \text{ N/cm}^2$, a térfogatváltozás 200 cm^3 , így a munkavégzés $28,56 \text{ J}$.

Hő formájában a belső energia növelésére és a munkavégzés pótlására $48,23 \text{ J} + 28,56 \text{ J} = 76,79 \text{ J}$ szükséges.

3. A 9. ábrán látható kapcsolásban a három árammérő teljesen egyforma, ellenállása $R_0 = 2 \text{ }\Omega$. Az A és B pontok között a potenciálkülönbség állandóan 19 V . Az 1. árammérő $I_1 = 2,5 \text{ A}$ -t, a 2. árammérő $I_2 = 1,5 \text{ A}$ -t jelez.



9. ábra

a) Mekkora áramot jelez a 3. árammérő?

b) Vizsgáljuk meg, hogyan változik az I_3 áramerősség, ha az R_x ellenállást változtatjuk?

(Nagy László)

Megoldás. a) Felírjuk a feszültségesést az A és C pontok között az 1., illetve a 2. és a 3. ampermérőkön keresztül:

$$I_1 R_0 = I_2 R_0 + I_3 R_0, \text{ innen}$$

$$I_3 = 1 \text{ A}.$$

b) Az áramelágazás törvénye szerint a D pontban

$$I_2 = I_2 + I_x,$$

a C pontban

$$I = I_1 + I_3.$$

A feszültségesés A és C között, az 1., illetve a 2. és a 3. ampermérőn keresztül:

$$I_1 R_0 = I_2 R_0 + I_3 R_0.$$

A feszültségesés D és B között, az R_x ellenálláson, illetve az R ellenálláson és a 3. ampermérőn keresztül:

$$I_x R_x = I_3 R_0 + I R.$$

R értéke az eredeti állapotból meghatározható. Ekkor AC között $R_0 I_1 = 5 \text{ V}$ a feszültség, így C és B között $19 \text{ V} - 5 \text{ V} = 14 \text{ V}$ a feszültség. Az R -en keresztül folyó áramerősség pedig $I_1 + I_3 = 3,5 \text{ A}$, tehát $R = 14 \text{ V} / 3,5 \text{ A} = 4 \Omega$.

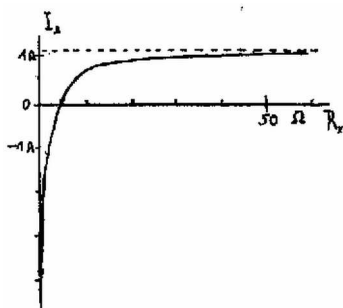
A teljes 19 V feszültség az ACB úton:

$$19 \text{ V} = I_1 R_0 + IR.$$

Ezt a kiegyensúlyozatlan Wheatstone-hídra jellemző egyenletrendszert megoldva kapjuk I_3 függését R_x től:

$$I_3 = \frac{19 \text{ V} \cdot (R_x - R)}{(2R_0 + 3R)R_x + R_0(R_0 + 2R)} = \frac{19 R_x - 76}{16 R_x + 20}.$$

A függvény grafikonja hiperbola (10. ábra). $R_x = 0$ -nál $I_3 = -3,8 \text{ A}$; $R_x = 4 \Omega$ -nál $I_3 = 0$; $R_x = 32 \Omega$ -nál $I_3 = 1 \text{ A}$; $R_x \rightarrow \infty$ esetén, I_3 értéke $1,1875 \text{ A}$ -hez tart.

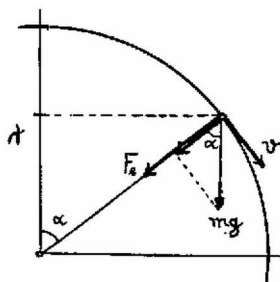


10. ábra

4. Egy $0,5 \text{ m}$ sugarú szigetelő anyagból álló, vékonyfalú gömbhéj középpontjában egy kicsiny, pozitív töltésű fémgolyó van, amely a gömbhéj felszínén $+1600 \text{ V}$ potenciált hoz létre. E gömbhéj tetejéről lecsúszik egy 4 kg tömegű kis test, amelynek valamilyen előjelű elektromos töltése van. A lecsúszó test akkor hagyja el a gömböt, amikor sebessége 2 m/s . A súrlódás elhanyagolható, $g = 10 \text{ m/s}^2$. Mekkora a lecsúszó test töltése?

(Légrádi Imre)

Megoldás. A lecsúszó test sebességét nem befolyásolja a töltés, mert az elektromos erő merőleges a pályára. Az energiamegmaradás törvényével kiszámítjuk, hogy mely szöghelyzetben hagyta el a kis test a gömböt (11. ábra):



11. ábra

$$\frac{mv^2}{2} = mgr(1 - \cos \alpha),$$

innen

$$\cos \alpha = 1 - \frac{v^2}{2gr} = 0,6, \quad \alpha = 53,13^\circ.$$

Ebben a helyzetben volt az mg súly $mg \cos \alpha$ összetevőjének és az elektromos vonzóerőnek, $9 \cdot 10^9 (\text{Nm}^2/\text{C}^2) \cdot Qq/r^2$ -nek az összege éppen egyenlő körmozgást létrehozó mv^2/r erővel:

$$\frac{mv^2}{r} = mg \cos \alpha + \frac{9 \cdot 10^9 (\text{Nm}^2/\text{C}^2) \cdot Qq}{r^2}.$$

(Q a golyó középpontjában levő töltést, q a kis test töltését jelenti.) A numerikus adatokból látszik, hogy az elektromos vonzóerő nélkül a súly összetevője nem lenne képes a kis testet $53,13^\circ$ -os szöghelyzetben a gömbön tartani. Különbösen is ismeretes, hogy a gömbről lecsúszó test $\arccos(2/3) = 48,19^\circ$ -os szöghelyzetben hagyja el a gömb felszínét. A mi esetünkben a kis test lejjebb jutott, tehát töltése negatív.

A gömb közepén levő test töltését az általa létrehozott $U = 9 \cdot 10^9 \text{ (Nm}^2/\text{C}^2) \cdot Q/r = 1600 \text{ V}$ feszültségből tudjuk meg, innen $Q = Ur/(9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2)$. Így az előbbi összefüggés alapján a kis test töltése:

$$q = (m/U)(v^2 - gr \cos \alpha) = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ C}.$$

A III. Kísérleti forduló

A versenyzők egy, a felületi feszültség következtében kialakult henger alakú felszín mozgását tanulmányozták.

Vermes Miklós