

Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat október 29-én rendezte 60. versenyét Budapesten és 11 vidéki városban az abban az évben érettségizettek és középiskolások részére. A versenyzők 5 órai munkaidő alatt oldhatták meg a három feladatot. Bármely segédeszköz használata meg volt engedve, beleértve a zsebszámítógépet is. A versenyen 240 dolgozatot adtak be. Ismertetjük a feladatokat és a verseny eredményét.

1. Egy  $L = 1,528$  méter hosszú pálcát vízszintes helyzetből,  $h_1 = 2,164$  méter magasságból elejtünk (1. ábra). Esés közben a pálca baloldali vége rugalmasan ütközik egy  $h_2 = 1,364$  méter magasságban levő szegbe. Az ütközéstől számítva mennyi idő múlva éri el a pálca jobboldali vége a talajt?  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

1984-02-081-1.eps

1. ábra

(Vermes Miklós)

**Megoldás:** Az esés törvénye szerint a szeghez érkezéskor a sebesség:

$$v_1 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)} = 4 \text{ m/s.}$$

1984-02-081-2.eps

2. ábra

Következik a nem centrális ütközés (2. ábra). A szeghez ütdéskor igen rövid  $\Delta t$  ideig  $F$  erő ébred. A pálca középpontja egy új  $v_2$  sebességgel megy tovább és  $\omega$  szögsebességgel forogni kezd középpontja körül. Az erőt megadja az impulzus (lendület) időegységre jutó változása:

$$F = \frac{m(v_1 - v_2)}{\Delta t}.$$

A forgás törvénye szerint a forgatónyomaték egyenlő a szöggyorsulás és tehetetlenségi nyomaték szorzatával. A szöggyorsulást  $\omega/\Delta t$  adja meg, a közepe körül forgó rúd tehetetlenségi nyomatéka pedig  $mL^2/12$ .

$$F \cdot \frac{L}{2} = \frac{\omega}{\Delta t} \cdot \frac{1}{12} \cdot mL^2.$$

A két egyenletből  $F \cdot \Delta t$  kiküszöbölésével kapjuk:

$$v_1 - v_2 = \frac{\omega L}{6}.$$

Most figyelembe kell vennünk azt a körülményt, hogy az ütközés rugalmas, tehát a mechanikai energiák összege változatlan marad:

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} + \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{1}{12} \cdot mL^2.$$

Az előző és a mostani egyenletből álló egyenletrendszer megoldása megadja a középpont haladó mozgásának sebességét az ütközés után és a forgás szögsebességét:

$$v_2 = \frac{v_1}{2} = 2 \text{ m/s}, \quad \omega = \frac{3v_1}{L} = 7,854 \text{ s}^{-1}.$$

Ezután a pálca tömegközéppontja függőleges lefelé hajítást végez  $v_2$  kezdősebességgel, és állandó  $\omega$  szögsebességgel forog középpontja körül. A legkorábban akkor érheti el a pálca jobboldali vége a talajt, amikor középpontja  $L/2$  magasságba ér. A lefelé hajítás útja ekkor  $h_2 - L/2$ . A hajítás úttörvényével:

$$h_2 - \frac{L}{2} = v_1 t + \frac{g}{2} \cdot t^2,$$

számadatainkkal, rendezve:  $5t^2 + 2t - 0,6 = 0$ . Ennek megoldása  $t = 0,2$  s. Ez az a legrövidebb időtartam, amelynek végén a pálca jobboldali vége a szeg elhagyása után a talajjal érintkezésbe kerülhet. Ezalatt az elforgás szöge  $\omega t = 7,854 \cdot 0,2 = 1,57 = 90^\circ$ . Tehát a pálca épp 0,2 s múlva, függőleges helyzetben kerül érintkezésbe a talajjal. A 3. ábra tizedmásodpercenként ábrázolja a pálca helyzetét.

1984-02-082-1.eps

3. ábra

2. Egy csigán átvett fonál végeire  $m_1 = 8$  kg és  $m_2 = 6$  kg tömegű testeket erősítettünk (4. ábra). A csiga magassága az asztal felett  $h = 4$  méter, a súrlódás elhanyagolható,  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>. Az  $m_1$  tömegű testet  $\alpha_0 = 30^\circ$ -hoz tartozó szöghelyzetből elengedjük.

1984-02-082-2.eps

4. ábra

a) Mekkora gyorsulásokkal indulnak el a testek?

b) Mekkora a testek sebességei és gyorsulásai, amikor az  $m_1$  tömegű test éppen az  $m_2$  tömegű test alatt halad át?  
(Nagy László)

**Megoldás.** Keressük, hogy egy  $\alpha$  szög által meghatározott helyzetben mekkora a testek  $v_1$  és  $v_2$  sebességei, valamint  $a_1$  és  $a_2$  gyorsulásai. Az  $m_1$  tömegű test  $\Delta s$  útjához a fonál  $\Delta s \cdot \sin \alpha$  rövidülése tartozik, ezért a sebességek összefüggése (5. ábra):

$$v_2 = v_1 \sin \alpha.$$

1984-02-083-1.eps

5. ábra

Az energiamegmaradás törvénye szerint, ha az indítás  $\alpha_0$  fonálhelyzetből történt:

$$m_2 g (h / \cos \alpha_0 - h / \cos \alpha) = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

Az egyenletrendszer megoldása szolgáltatja a sebességeket:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2m_2 g h (1 / \cos \alpha_0 - 1 / \cos \alpha)}{m_1 + m_2 \sin^2 \alpha}},$$

$$v_2 = \sin \alpha \sqrt{\frac{2m_2 g h (1 / \cos \alpha_0 - 1 / \cos \alpha)}{m_1 + m_2 \sin^2 \alpha}}.$$

Az indítás pillanatában természetesen mindkét sebesség nulla. A  $0^\circ$ -os helyzethez tartozóan  $v_{20} = 0$  és

$$v_{10} = \sqrt{2gh \cdot \frac{m_2}{m_1} (1 / \cos \alpha_0 - 1)} = 3,047 \text{ m/s}.$$

A gyorsulások levezetéséhez szükségesek a következő geometriai összefüggések:

$$\sin \alpha = \frac{s}{\sqrt{s^2 + h^2}}, \quad v_2 = \frac{s}{\sqrt{s^2 + h^2}} \cdot v_1, \quad L = \sqrt{s^2 + h^2}.$$

Differenciáljuk az idő szerint  $v_2$ -t:

$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{1}{s^2 + h^2} \left[ \frac{ds}{dt} \sqrt{s^2 + h^2} - s \cdot \frac{2s}{2\sqrt{s^2 + h^2}} \cdot \frac{ds}{dt} \right] v_1 + \frac{s}{\sqrt{s^2 + h^2}} \cdot \frac{dv_1}{dt},$$

$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{ds}{dt} \left( \frac{L}{L^2} - \frac{s^2}{L^3} \right) v_1 + \frac{s}{L} \cdot \frac{dv_1}{dt}.$$

Figyelembe véve, hogy  $ds/dt = -v_1$ , valamint tekintettel a geometriai összefüggésekre kapjuk a gyorsulások közti kapcsolatot:

$$a_2 = -\frac{\cos^3 \alpha}{h} \cdot v_1^2 + a_1 \sin \alpha.$$

Szükségünk van a fonálerőre is. Ez  $m_1$  tömeg esetében  $F \sin \alpha = m_1 a_1$ , az  $m_2$  tömeg esetében  $F = m_2 (g - a_2)$ . A fonálerőket egyenlővé téve:

$$m_1 a_1 + m_2 a_2 \sin \alpha = m_2 g \sin \alpha.$$

A legutóbbi két egyenletünkből álló egyenletrendszert megoldva megkapjuk a gyorsulásokat. Felhasználva  $v_1$  és  $v_2$  előbb kiszámított értékeit is, az eredmények:

$$a_1 = \frac{m_2 g \sin \alpha}{(m_1 + m_2 \sin^2 \alpha)^2} \cdot [(m_1 + m_2 \sin^2 \alpha) + 2m_2 \cos^3 \alpha (1 / \cos \alpha_0 - 1 / \cos \alpha)],$$

$$a_2 = \frac{m_2 g}{(m_1 + m_2 \sin^2 \alpha)^2} [(m_1 + m_2 \sin^2 \alpha) \sin^2 \alpha - 2m_1 \cos^3 \alpha (1 / \cos \alpha_0 - 1 / \cos \alpha)].$$

Az indulás pillanatában a gyorsulások:

$$a_{1i} = g \cdot \frac{m_2 \sin \alpha_0}{m_1 + m_2 \sin^2 \alpha_0} = 3,158 \text{ m/s}^2,$$

$$a_{2i} = g \cdot \frac{m_2 \sin^2 \alpha_0}{m_1 + m_2 \sin^2 \alpha_0} = 1,579 \text{ m/s}^2.$$

Az  $\alpha = 0^\circ$ -hoz tartozó gyorsulások:

$$a_{10} = 0, \quad a_{20} = -g \cdot \frac{2m_2}{m_1} (1/\cos \alpha_0 - 1) = -2,321 \text{ m/s}^2.$$

A 6. ábra a sebességek és gyorsulások  $\alpha$  szögtől való függését mutatja.

1984-02-084-1.eps

6. ábra

Ha csak a feladott kérdésekben szereplő speciális értékekre van szükség, akkor sokkal rövidebben járhatunk el úgy, hogy egyenleteinkben már kezdetből fogva  $\alpha_0 = 30^\circ$ , illetve  $0^\circ$ -ot használunk.

Speciális közelítő eljárások is vannak  $\alpha_{20}$  kiszámítására (7. ábra). Lássunk ezek közül kettőt!

1984-02-084-2.eps

7. ábra

**A.** A fonál  $\omega$  szögsebességgel közeledik a függőleges helyzetéhez. Az  $m_1$  tömegű test utolsó útdarabja egyrészt  $h\alpha$ , másrészt  $\omega dt \cdot h$ ,  $h\alpha = \omega dt \cdot h$ , vagyis  $dt = \alpha/\omega$ . Ezalatt csökken a sebesség  $v_1 \sin \alpha$ -ról 0-ra, tehát a sebességváltozás  $dv_2 = -v_1 \sin \alpha$ . A keresett gyorsulás:

$$a_{20} = \frac{dv_2}{dt} = \frac{-v_1 \sin \alpha}{\alpha/\omega} = -\frac{v_1^2}{h} \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha} = -\frac{v_1^2}{h}.$$

**B.** A függőleges fonálhelyzetéhez közel, amikor az  $m_1$  tömegű test egyenletesen mozog  $v_1$  sebességgel, Pitagorasz-tétellel:

$$(h+x)^2 = h^2 + (v_1 dt)^2, \quad \text{ebből} \quad x = \frac{v_1^2 (dt)^2}{2h}.$$

Az  $m_2$  tömegű test közelítően egyenletesen lassulva mozog a megállásig, ezért  $x = -a_{20} (dt)^2/2$ . A két  $x$ -re kapott értéket egyenlővé téve  $a_{20} = -v_1^2/h$ .

**3.** *A világűrben elektromosan semleges, belül üres, zárt vezető gömbhéj lebeg. Közepében kicsiny, pozitív töltésű fémgolyó nyugszik szabadon. Távoli kondenzátorlemezek segítségével a gömb alakú „Faraday-kalitka” körül homogén elektromos teret hozunk létre. Mozgásba jön-e a kicsiny fémgolyó, illetőleg a gömbhéj és ha igen, miképpen?*

(Károlyházy Frigyes)

**Megoldás.** A külső tér nélkül a kis fémgolyó a gömbhéj középpontjában (labilis) egyensúlyi helyzetben van (8. a ábra).

1984-02-085-1.eps

8. a ábra

A külső tér létrehozásának pillanatában a gömbhéjon megosztott töltések mutatkoznak. Így a kis fémgolyót a gömbhéj árnyékoló hatásával védi a külső tértől. Ezért a külső tér bekapcsolásának pillanatában a kis fémgolyó gyorsulása még nulla. A gömbhéjnak az ábra szerinti bal oldalán a fémgolyó által létrehozott tér és a külső tér ellentétes irányú, a jobb oldalon pedig azonos irányú. A gömbhéjon a töltésmegosztásból származó negatív töltésekre ható eredő erő ezért kisebb lesz, mint a pozitív töltésekre ható eredő erő. A gömbhéj ezért a külső tér bekapcsolásának pillanatában jobbra indul el (8. b ábra). Amikor a gömbhéj már elmozdult, a fémgolyó már nem lesz a középpontban. Ekkor a fémgolyón levő pozitív töltés is töltésmegosztást hoz létre a gömbhéjon. E töltések hatására a fémgolyó a hozzá közelebb eső oldalon levő negatív töltések irányába, tehát balra indul el (8. c ábra). Amint a golyó és a gömbhéj összeér, az egész fémtárgy pozitív töltésű lesz, és a tér által megszabott irányban (az ábra szerint jobbra) gyorsulva mozog (8. d ábra).

1984-02-085-2.eps

8. b ábra

1984-02-085-3.eps

8. c ábra

1984-02-085-4.eps

8. d ábra

### A verseny eredménye

I. díjat ketten kaptak egyenlő helyezésben: *Árkossy Ottó*, a budapesti Semmelweis Orvostudományi Egyetem hallgatója, aki Esztergomban a Dobó Katalin Gimnáziumban érettségizett mint Sipos Imre tanítványa és *Erdős László* a budapesti Berzsényi Dániel Gimnázium IV. o. tanulója, tanára Koltai Mária.

II. díjat kapott *Fodor Gyula*, a budapesti Móricz Zsigmond Gimnázium IV. o. tanulója, tanára Tarnócziné Gedeon Melitta.

III. díjat ketten kaptak egyenlő helyezésben: *Csillag Péter*, a budapesti Landler Jenő Gépészeti és Híradástechnikai Szakközépiskola IV. o. tanulója és *Frei Zsolt*, a budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Karának fizikus hallgatója, aki Pécssett a Nagy Lajos Gimnáziumban érettségizett mint Kállai Miklósné és Tornycs Tivadar tanítványa.

Dicséretet hárman kaptak egyenlő helyezésben: *Kovács Tamás*, a debreceni Kossuth Lajos Gimnázium IV. o. tanulója, tanára Szegedi Ervin, továbbá *Náray Miklós* honvéd, aki Budapesten érettségizett az I. István Gimnáziumban mint Moór Ágnes tanítványa és *Sczigel Gábor* honvéd, aki Budapesten az Apáczai Csere János Gimnáziumban érettségizett, mint Holics László tanítványa.

Az 1. feladatot a felsoroltakon kívül teljesen megoldották még a következő versenyzők: *Drobni András* (Bp. I. István G. IV. o. t.: Cseh Géza), *Mandzsú Zoltán* (Bp. Fazekas M. G. IV. o. t.: Horváth Gábor), *Rácz Attila* (Sopron, Berzsényi D. G. IV. o. t.: Nagy Márton), *Szakállas Gyula* (Zalaegerszeg, Zrínyi M. G. IV. o. t.: Gódor Győzőné), *Tőrőcsik Jenő* honvéd (érettségizett Bp. Fazekas M. G. t.: Horváth Gábor).

A 2. feladatot a nyerteseken kívül teljesen megoldották még a következő versenyzők: *Beke Sándor* honvéd (érettségizett Miskolc, Földes F. G. t.: Zámboreszky Ferenc), *Fáth Gábor* (Bp. Fazekas M. G. IV. o. t.: Horváth Gábor), *Gaál Péter* (Bp. Apáczai Cs. J. G. o. t.: Zsigri Ferenc), *Megyesi Gábor* (Szeged, Ságvári E. G. III. o. t.: Juhászné Mészáros Mária), *Pfeil Tamás* (Dunaújváros, Münnich F. G. III. o. t.: Székelyi Sándorné).