

A címet elolvasva rögtön felmerül a kérdés: a háromszög mely pontjait nevezzük nevezetes pontnak? Nemrégiben a KÖMAL-ban (64. kötet, 4. szám, 1982. ápr.) is megjelent egy érdekes cikk, amely ezt a kérdést tárgyalta (*Hermann Bauer: Hány nevezetes pontja legyen a háromszögnek?*). Eszerint a háromszög négy nevezetes pontja a magasságpont, a súlypont, továbbá a háromszög beírható és köré írható körének közepe. Megmutatja, hogy az oldalfelező pontokból alkotott középvonal-háromszög beírt körének közepe szintén sok szép tulajdonsággal rendelkezik, és bizonyos szempontból természetesen egészíti ki tulajdonságaival az említett négy pontot.

Nyilván részben ízlés kérdése, hogy melyik pontot nevezzük „nevezetes pontnak”. Német (és magyar) geometerek általában az elsőnek felsorolt négy pontot tekintik nevezetesnek. Ennek részben fizikai, részben történeti okai vannak: vizsgálatukat ókori görög matematikusok kezdték el.

Jelen cikkben főleg francia geometerek (Lemoine és Gergonne) nyomán kevésbé ismert nevezetes pontokra szeretnénk felhívni a figyelmet. Ezek nem definiálhatók olyan egyszerűen, mint pl. a beírt kör középpontja, ám olyan sok meglepő és szép tulajdonságuk van, hogy nem csoda, ha egy matematikus az egyik ilyen pontot a magasságpont, a súlypont és beírt kör középpontja mellett a háromszög negyedik legfontosabb pontjának nevezte.

*

1. A beírt kör közepe a szögfelezők találkozási pontja, a magasságpont a magasságoké, a súlypont pedig a súlyvonalaké. Definíálásukhoz mindhárom esetben előbb be kell bizonyítani, hogy a megfelelő egyenesek valóban egy pontban találkoznak. (A köré írt kör közepe – s az említett cikk által javasolt ötödik nevezetes pont, a középvonal háromszög beírt körének közepe – ebből a szempontból kicsit rendhagyó: a középvonal-háromszög magasságainak, ill. szögfelezőinek metszéspontja. Ezek is három-három egyenesnek a metszéspontjai.)

Az ABC háromszög *Ceva-szakaszának* vagy a *háromszög transzverzálisának* azt a szakaszt (egyenest) nevezzük, ami a háromszög egyik csúcsát a szemközti oldal valamely pontjával köti össze. A nevezetes pontok vizsgálata az alábbi, *G. Ceva* (1678–1734) olasz matematikustól származó tétellel kezdődik:

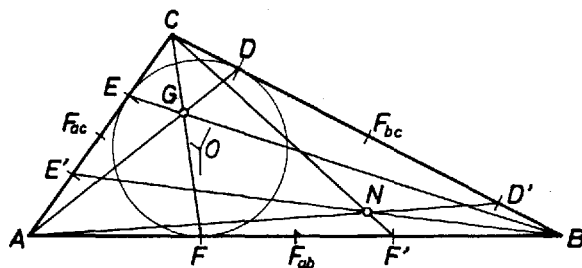
1. tétel (*Ceva tétele*) Legyen D, E, F a BC, CA, AB oldalak egy-egy pontja. Az AD, BE, CF Ceva-szakaszok pontosan akkor találkoznak egy pontban, ha

$$BD \cdot CE \cdot AF = DC \cdot EA \cdot FB.$$

(A tétel bizonyítása megtalálható pl. *Coxeter és Greitzer: Az újra felfedezett geometria c.* könyvének 19–20. oldalán; egy másik bizonyítás található *Horvay és Reiman: Geometriai feladatok gyűjteménye* I. kötetében, az 1263–64. feladat megoldásában.)

Ez a tétel máris módot ad két újabb nevezetes pont definiálására:

2. tétel. Érintse az ABC háromszög beírt köre a BC, CA, AB oldalakat rendre a D, E, F pontban. Az AD, BE, CF Ceva-szakaszok egy pontban találkoznak. Ezt a pontot nevezzük a háromszög *Gergonne-pontjának* (1. ábra).



1. ábra

3. tétel. Ha az ABC háromszög AB, BC, CA oldalához írt kör a megfelelő oldalt rendre az F', D', E' pontban érinti, akkor az AD', BE', CF' Ceva-szakaszok egy pontban találkoznak. Ez a pont a háromszög *Nagel-pontja*.

A 2. tétel bizonyításához elég emlékeztetnünk arra, hogy egy pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlőek, ezért $BD = BF$, $AF = AE$ és $CE = CD$. Következésképp $BD \cdot CE \cdot AF = DC \cdot EA \cdot FB$, és így Ceva tétele szerint AD, BE, CF valóban egy pontban találkozik.

A továbbiakban az AB, BC, CA oldalak felezőpontját F_{ab}, F_{bc}, F_{ca} -val fogjuk jelölni, s általában az XY szakasz felezőpontját F_{xy} nal. A 3. tétel bizonyításához elég azt megmondolni, hogy D -nek F_{bc} -re vonatkozó tükörképe éppen D' , s ugyanígy E' az E -nek F_{ac} -re, F' pedig F -nek F_{ab} -re vonatkozó tükörképe. Következésképp $BD' = CD$, $CD' = BD$, $CE' = AE$, $AE' = CE$, $AF' = BF$ és $BF' = AF$, tehát

$$BD' \cdot CE' \cdot AF' = CD \cdot AE \cdot BF,$$

$$CD' \cdot AE' \cdot BF' = BD \cdot CE \cdot AF.$$

A jobb oldalon álló szakaszok páronként egyenlők, egyenlők tehát a bal oldalon álló szorzatok értékei is, ezért Ceva tétele szerint az AD' , BE' , CF' Ceva-szakaszok valóban egy pontban találkoznak.

A 3. tétel bizonyításánál tulajdonképpen csak annyit használtunk fel, hogy a jobb oldali szorzatok egyenlők, vagyis az AD , BE , CF szakaszok egy pontban találkoznak.

Így tehát a következő tételt igazoltuk.

4. tétel. Legyen D , E , F a BC , CA , AB oldal egy-egy pontja, e három pontnak a megfelelő oldal felezőpontjára vonatkozó tükörképe pedig D' , E' , F' . Az AD , BE , CF szakaszok akkor és csak akkor találkoznak egy K pontban, ha az AD' , BE' , CF' is egy K' pontban találkoznak.

A 4. tétel tehát a háromszög minden „nevezetes pontjához” hozzárendel egy másikat. A súlyponthoz önmagát rendeli, a Gergonne-ponthoz a Nagel-pontot és viszont. Általában ha K -hoz K' -t rendeli, akkor K' -hoz K -t. Érdekes elgondolkozni azon, mit rendel a magasságpont, a körülírt és a beírt kör középpontjához!

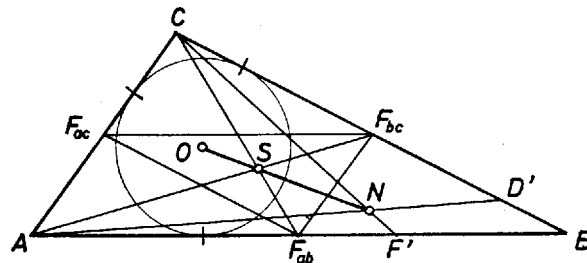
Mind a régi, mind az új nevezetes pontokat úgy definiáltuk, hogy előbb létezésüket bizonyítottuk. A matematika nem leíró tudomány, már legegyszerűbb definíciói mögött is sokszor mély, észre sem vett gondolati munka van. Problémák, feladatok megoldása sokszor egy gondosan megadott definíción múlik, ezt a jelen cikkben is látni fogjuk.

*

2. Most rátérünk a Nagel-pont vizsgálatára.

A továbbiakban rögzítünk egy (tetszőleges) ABC háromszöget. Ennek Gergonne-pontját G -vel, Nagel-pontját N -nel, a beírt kör és a BC , CA , AB oldalak érintési pontját rendre D , E , F -fel, ezek F_{bc} , F_{ca} , ill. F_{ab} -re való tükörképét rendre D' , E' , F' -vel jelöljük. (G tehát az AD , BE , CF , N pedig az AD' , BE' , CF' szakaszok közös pontja.) A szokásos jelöléssel $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, a velük szemben fekvő szögek a háromszögben α , β , γ , $s = \frac{a+b+c}{2}$, ϱ az ABC háromszög beírt körének sugara, r a körülírt körnek; ϱ_a , ϱ_b , ϱ_c pedig az a , b , ill. c oldalhoz hozzáírt körök sugara.

5. tétel. Az ABC háromszög S súlypontja, N Nagel-pontja és beírt körének O közepe egy egyenesen van és $OS:SN = 1:2$ (2. ábra).



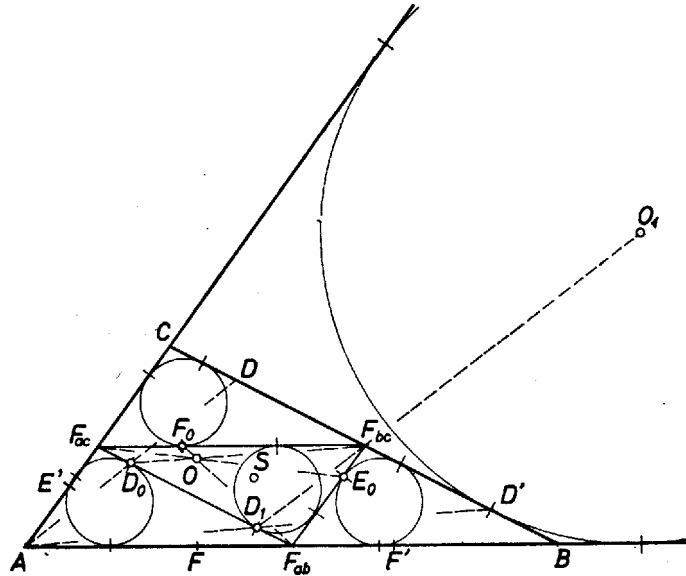
2. ábra

Az 5. tétel (melyet érdemes összevetni a bevezetőben idézett cikk 3. tételével) az alábbi tétellel egyenértékű:

6. tétel. Az ABC háromszög beírt körének közepe az oldalfelező pontokból alkotott középvonal-háromszög Nagel-pontja.

Ismeretes, hogy az ABC háromszög oldalfelező pontjai által alkotott háromszöget az ABC háromszög S súlypontjából $(-2):1$ arányú nagyítás éppen az ABC háromszögbe viszi át, hiszen a súlyvonalak harmadolják egymást. Az 5. tétel azt mondja ki, hogy ennél a transzformációnál az ABC háromszög beírt körének O középpontja a Nagel-pontba megy át. A hasonlósági transzformáció a középvonal-háromszög Nagel-pontját az ABC háromszög Nagel-pontjába viszi, amivel a két tétel ekvivalenciáját beláttuk.

Elég tehát a 6. tételt bizonyítani. Erre többfajta számolós bizonyítás ismeretes. Az alábbi, ha nem is a leggyorsabb, de a háromszög több geometriai tulajdonságára mutat rá.



3. ábra

Érintse az $AF_{ab}F_{ac}$ háromszög beírt köre az $F_{ab}F_{ac}$ oldalt (3. ábra) a D_0 pontban. Az $AF_{ab}F_{ac}$ háromszög az ABC háromszögnek A -ból $1/2$ arányban zsugorított képe, tehát az AD_0 egyenes éppen D -ben metszi a BC oldalt és D_0 felezi az AD szakaszt, továbbá $F_{ab}D_0 = BD/2$ és $F_{ac}D_0 = CD/2$.

Érintse az $F_{ab}F_{ac}F_{bc}$ háromszög beírt köre az $F_{ac}F_{ab}$ oldalt D_1 -ben. Az $F_{ab}F_{ac}F_{bc}$ háromszög az ABC -nek az S súlypontból $-1/2$ arányban zsugorított képe (B -nek F_{ac} , C -nek F_{ab} felel meg). Ezért $F_{ac}D_1 = BD/2$. Azt kaptuk, hogy $F_{ab}D_0 = F_{ac}D_1$, tehát D_0 és D_1 szimmetrikusak az $F_{ab}F_{ac}$ oldal felezőpontjára. Minthogy D és D' tükrösek BC felezőpontjára, és az S súlypontból $1/2$ arányban kicsinyítve B , D , C rendre F_{ac} , D_1 , F_{ab} -be megy, ezért D' képe D_0 lesz, AD' képe pedig $F_{bc}D_0$.

Jelölje a $BF_{bc}F_{ab}$ háromszögbe beírt kör és az $F_{bc}F_{ab}$ oldalnak az érintési pontját E_0 , a $CF_{bc}F_{ac}$ háromszögbe beírt kör és az $F_{bc}F_{ac}$ oldal érintési pontját F_0 . A fenti gondolatmenet elismétlésével azt kapjuk, hogy ha S -ből az ABC háromszöget $-1/2$ arányban kicsinyítjük, BE' képe $F_{ac}E_0$, CF' képe $F_{ab}F_0$ lesz. A középvonal-háromszög Nagel-pontja tehát az $F_{bc}D_0$, $F_{ac}E_0$, $F_{ab}F_0$ szakaszok közös pontja. Ha belátjuk, hogy az ABC háromszög beírt körének közepe mindhárom szakaszon rajta van, akkor a 6. tételt bizonyítottuk.

Nyilván elég azt belátni, hogy például az ABC háromszög beírt körének O közepe az $F_{bc}D_0$ szakaszon van. D_0 felezőpontja AD -nek, tehát $2\overrightarrow{OD_0} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}$. Ugyanígy $2\overrightarrow{OF_{bc}} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Azt kell belátni, hogy $\overrightarrow{OD_0}$ és $\overrightarrow{OF_{bc}}$ párhuzamos. Ez akkor és csak akkor teljesül, ha a két vektor vektoriális szorzata nulla. Fejtsük ki a vektoriális szorzatukat!

$$(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}) \times (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} \times \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} \times \overrightarrow{OC}.$$

A jobb oldalon az ABC síkra merőleges vektorok állnak, hosszuk megegyezik az OAB , OAC , ODB , ODC háromszögek (előjeles) területével, közülük az első és az utolsó a sík egyik oldalára, a másik kettő a sík másik oldalára mutat a háromszögek körüljárási irányának megfelelően. A négy vektor összege tehát akkor nulla, ha

$$t_{OAB} + t_{ODC} = t_{OAC} + t_{ODB}.$$

Nyilvánvaló, hogy

$$t_{OAB} + t_{ODC} = \frac{1}{2}(AB + DC)\varrho \quad \text{és} \quad t_{OAC} + t_{ODB} = \frac{1}{2}(AC + DB)\varrho.$$

De $AB + DC = s = AC + DB$, a kívánt egyenlőség tehát fennáll. Ezzel az 5. és 6. tétel bizonyítását befejeztük.

Az az állítás, hogy D_0 , O , F_{bc} egy egyenesbe esik, speciális esete Newton alábbi nevezetes tételének:

7. tétel. A $PQRS$ érintőnégyyszög átlóinak felezőpontját összekötő egyenes átmegy a beírt kör középpontján.

A mi esetünkben a $PQRS$ négyszög szerepét az $ABCD$ „érintőnégyyszög” játszotta, melynek B , D , C csúcsai egy egyenesbe esnek. Az általános eset pontosan ugyanígy bizonyítható, a bizonyítás végén azt kell kihasználni, hogy érintőnégyyszög két-két szemben levő oldalának összege egyenlő. [A Sklarszkij–Csencov–Jaglom: Válogatott feladatok az elemi matematika köréből Geometria/1 kötetének 135. a) feladata egy másik bizonyítást ad Newton tételére, pusztán területátalakításokkal. A fenti bizonyítás is elmondható volna területátalakításokkal, de vektorokkal lényegesen rövidebb és elegánsabb.]

8. tétel. Az N Nagel-pontra $AN:AD' = a:s$.

A 6. tétel bizonyításánál használt jelölésekkel $AN:AD' = F_{bc}O:F_{bc}D_0$, mert S -ből $-1/2$ arányban kicsinyítve A , N , D' képe rendre F_{bc} , O és D_0 . Másrészt $F_{bc}O:F_{bc}D_0 = \varrho:\frac{m_a}{2}$, hiszen O távolsága a BC oldaltól ϱ , D_0 távolsága pedig $\frac{m_a}{2}$. De $\varrho:\frac{m_a}{2} = 2\varrho:m_a = a:s$, hiszen $2\varrho s = 2t_{ABC} = am_a$.

9. tétel. A Nagel-pont távolsága a BC , CA , AB oldaltól rendre $2\varrho\frac{s-a}{a}$, $2\varrho\frac{s-b}{b}$, $2\varrho\frac{s-c}{c}$ vagy másképp $\varrho\frac{m_a}{\varrho_a}$, $\varrho\frac{m_b}{\varrho_b}$, $\varrho\frac{m_c}{\varrho_c}$.

Az $F_{ab}F_{ac}F_{bc}$ háromszög Nagel-pontja O . O távolsága $F_{ab}F_{ac}$ -től $\frac{m_a}{2} - \varrho$. N távolsága BC -től (az S -ből történő $-2:1$ arányú nagyítás miatt) ennek kétszerese, vagyis $m_a - 2\varrho$. De $am_a = 2\varrho s$, tehát $m_a = \frac{2\varrho s}{a}$, ezért $m_a - 2\varrho = 2\varrho\frac{s-a}{a}$, ahogy állítottuk.

Végül $am_a = 2t_{ABC} = 2\varrho_a(s-a)$, ahonnan $2\varrho\frac{s-a}{a} = \varrho\frac{m_a}{\varrho_a}$.

*

1. feladat. Igazoljuk, hogy a Nagel-pontnak a BC , CA , AB oldaltól mért távolságai úgy aránylanak egymáshoz, mint $\frac{1}{1-\cos\alpha}:\frac{1}{1-\cos\beta}:\frac{1}{1-\cos\gamma}$.

2. feladat. Igazoljuk, hogy a Gergonne-pontnak a BC , CA , AB oldaltól mért távolságai úgy aránylanak egymáshoz, mint $\frac{1}{1+\cos\alpha}:\frac{1}{1+\cos\beta}:\frac{1}{1+\cos\gamma}$.

3. feladat. Az ABC háromszög AB oldalához írt kör érintse az AB oldalt F' -ben, az AC oldalt E_2 -ben. Az AC oldalhoz írt kör érintse az AC oldalt E' -ben. BE' és CF' egyenesek metszéspontján keresztül húzzunk párhuzamost AC -vel, az A csúcson keresztül pedig BE' -vel. Bizonyítsuk be, hogy ez a két egyenes az $F'E_2$ egyenesen metszi egymást.

*

Befejezésül térjünk még vissza egy rövid időre a 7. tételre, és alkalmazzuk azt pl. az $ABD'C$ „érintőnégyszögre”. Valóban, ez is érintőnégyszög, ahogy az $ABDC$ négyszög az ABC háromszög beírt köre köré írt érintőnégyszög, ugyanígy az $ABD'C$ a BC oldalhoz hozzáírt kör érintőnégyszöge. Jelölje most O_1 a hozzá írt körnek középpontját. Azt állítjuk, hogy BC oldalfelező pontját AD' szakasz felezőpontjával összekötő egyenes átmegy O_1 -en. A 6. tétel bizonyítása során használt gondolatmenet szerint ehhez megint csak annyit kell belátni, hogy az

$$(\overrightarrow{O_1A} + \overrightarrow{O_1D'}) \times (\overrightarrow{O_1B} + \overrightarrow{O_1C}) = \overrightarrow{O_1A} \times \overrightarrow{O_1B} + \overrightarrow{O_1D'} \times \overrightarrow{O_1B} + \overrightarrow{O_1A} \times \overrightarrow{O_1C} + \overrightarrow{O_1D'} \times \overrightarrow{O_1C}.$$

kifejezés értéke a nullavektor. A jobb oldalon az ABC háromszög síkjára merőleges vektorok állnak, hosszuk rendre t_{O_1AB} , $t_{O_1D'B}$, t_{O_1AC} , $t_{O_1D'C}$. A háromszögek körüljárásának megfelelően az első két vektor azonos féltérbe, a másik kettő a másik féltérbe mutat. Annyit kell tehát belátni, hogy $t_{O_1AB} + t_{O_1D'B} = t_{O_1AC} + t_{O_1D'C}$. De ez igaz, hiszen

$$t_{O_1AB} + t_{O_1D'B} = (AB + D'B)\varrho_a = s \cdot \varrho_a = (AC + D'C)\varrho_a = t_{O_1AC} + t_{O_1D'C}.$$

Azt kaptuk, hogy az AD' szakasz felezőpontját BC oldalfelezőpontjával (F_{bc} -vel) összekötő egyenes átmegy a BC oldalhoz hozzáírt kör középpontján. A 6. tétel bizonyítása során láttuk, hogy AD' felezőpontja éppen D_1 , vagyis a középponti háromszög beírt körének érintési pontja (l. 3. ábra). Az AD' felezőpontját F_{bc} -vel összekötő szakaszon tehát rajta van a középponti háromszög Gergonne-pontja! A következő tételhez jutottunk tehát:

10. tétel. Az ABC háromszög oldalaihoz írt körök középpontját a megfelelő oldal felezőpontjával összekötő egyenesek a középponaháromszög Gergonne-pontjában találkoznak.

Ennek a tételnek – amelyet a 6. tétellel való rokonsága miatt bizonyítottunk – teljes jelentősége csak a következő részben fog kiderülni (l. a 26. tételt).

*

4. feladat. Szerkesszünk háromszöget, ha ismerjük két oldalának különbségét, a harmadik oldalhoz tartozó magasságát, s az ehhez az oldalhoz írt kör sugarát!