

A sík *pontjai* egy parabola szempontjából három diszjunkt halmazba sorolhatók: azon pontok halmaza, amelyek a vezéregyeneshez közelebb vannak, mint a fókuszhoz; azon pontok halmaza, amelyek a vezéregyenestől és a fókuszról egyenlő távolságra vannak; azon pontok halmaza, amelyek a vezéregyenestől távolabb vannak, mint a fókuszról.

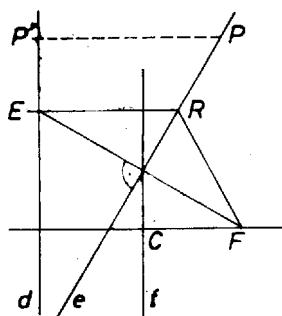
Olyan *egyenes*, amelynek minden pontja az első halmazba esik, létezik – pl. maga a vezéregyenes –, míg olyan egyenes, amelynek minden pontja a harmadik halmazba esik, nem létezik.

Hasonló három halmazba sorolás létezik a kör szempontjából is: azon pontok halmaza, amelyeknek a középponttól mért távolsága nagyobb a kör sugaránál, azon pontok halmaza, amelyeknek a középponttól mért távolsága egyenlő a kör sugarával, azon pontok halmaza, amelyeknek a középponttól mért távolsága kisebb a kör sugaránál. Itt is létezik olyan egyenes, amelynek minden pontja az első halmazba tartozik, de nem létezik olyan egyenes, amelynek minden pontja a harmadik halmazba tartozik. A körnél kézenfekvő, hogy az első halmazba tartozó pontokat külső, a harmadik halmazba tartozókat belső pontoknak hívjuk. Ezért a parabolánál is azokat a pontokat, amelyek a vezéregyeneshez közelebb vannak, mint a fókuszhoz, *külső*, míg azokat, amelyek a vezéregyenestől távolabb vannak, mint a fókuszról, *belső* pontoknak nevezzük. Vegyük még észre, hogy mind a körnél, mint a parabolánál a külső pontokból a görbe *domborúnak*, míg a belső pontokból *homorúnak* látszik.

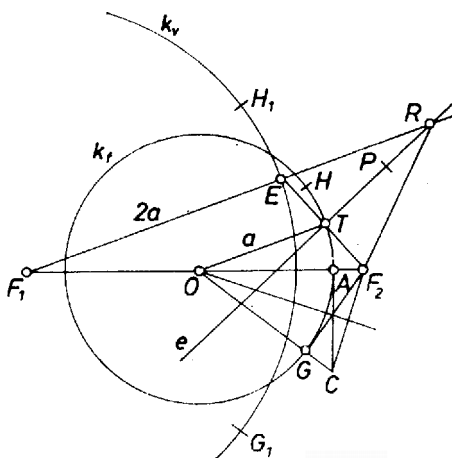
A hiperbolánál ugyanez a három halmaz: azon pontok halmaza, amelyekre a fókuszról mért távolságkülönbség abszolút értéke kisebb, mint $2a$, azon pontok halmaza, amelyekre a fókuszoktól mért távolságkülönbség abszolút értéke $2a$, azon pontok halmaza, amelyekre a fókuszoktól mért távolságkülönbség abszolút értéke nagyobb, mint $2a$. Itt is létezik olyan egyenes, amelynek minden pontja az első halmazba tartozik – pl. a melléktengely – és nem létezik olyan egyenes, amelynek minden pontja a harmadik halmazba tartozik. Itt is igaz, hogy az első halmaz pontjaiból a hiperbola *domborúnak*, míg a harmadik halmaz pontjaiból *homorúnak* látszik. Az ellipszisre vonatkozó ugyanilyen típusú megállapításokat az olvasóra bízom.

Ezek után célszerű a parabola, a hiperbola, az ellipszis érintőjét a kör érintőjéhez hasonlóan úgy definiálni, hogy olyan egyenesek, amelyeknek egy közös pontjuk van a görbével és minden más pontjuk külső pont.

A parabola definíciója átfogalmazható a következőképpen: a parabola azon körök középpontjainak halmaza, amelyek érintik a vezéregyeneset és átmennek a fókuszon. A hiperbola és az ellipszis esetén tekintsük az F_1 középpontú $2a$ sugarú kört – ennek neve *vezérkör*. Hiperbola esetén a másik fókusz – F_2 – a vezérkörön kívül, ellipszis esetén a vezérkörön belül van és a két fókusz két különböző pont. A közös definíció: azon körök középpontjainak halmaza, amelyek a vezérkört érintik és átmennek a másik fókuszon.



7. ábra



8. ábra

Tetszőleges görbepont szerkesztését ezek alapján úgy végezzük el, hogy a vezérvonalon kijelölünk egy érintési pontot – legyen ez E , és keressük annak a körnek a középpontját, amelyik a vezérvonalat E -ben érinti és átmege a fókuszon. Az

e egyenes a 7.–8. ábrákon olyan egyenes, amelynek R kivételével minden pontja külső pont. A parabolánál $RF = RE$ miatt minden R -től különböző P pontra a vezéregyenesestől mért távolság (PP') kisebb a fókuszról mért távolságnál: $PP' < PE = PF$. A hiperbolánál $PF_2 = PE$, és így a PEF_1 háromszögben a PF_1 , PE oldalak különbsége valóban kisebb $EF_1 = 2a$ -nál. Tehát az e egyenes érintője a görbéknek.

Az érintő szerkesztéséből adódik, hogy a fókuszhoz az érintőre vonatkozó tengelyes tükröképe a vezérvonalon van, az érintő az F_1RF_2 háromszög belső szögfelezője a hiperbolánál, a parabolánál az ERF szög felezője; a fókuszról az érintőre állított merőleges talppontja a fővonalon van. Hiperbolánál és ellipsziszén általában elterjedt, hogy az O középpontú a sugarú kör neve főkör. A parabolánál csúcserintő vagy tengelyponti érintő a szokásos elnevezés, melyet a hiperbola és ellipszis mintájára én főegyenesnek nevezek. Ez annál is inkább indokolt, mert mindhárom görbénél a fővonal a vezérvonalnak a fókuszra vonatkozó $1/2$ arányú középpontosan hasonló képe. (A 7. ábráról a parabola érintőjének két további közismert tulajdonsága is leolvasható: az érintő a főegyenesből fele akkora szakaszt vág le, mint az E érintési pont távolsága a tengelytől; az érintő a tengelyen ugyanakkora és ellentétes irányítású szakaszt vág le, mint az érintési pont távolsága a főegyenesestől.

★

5. feladat. Igazoljuk, hogy a parabolának semelyik két érintője nem párhuzamos!

★

Érintőszerkesztés kúpszelethez

Ha kúpszelethez külső pontból érintőt akarunk szerkeszteni, akkor az érintő és a fővonal metszéspontjai szerkeszthetők, mert ezek a pontok a fővonalon kívül rajta vannak a külső pont – fókusz szakasz Thalész-körén. Így tehát egy pontból legfeljebb két érintő szerkeszthető.

Abból, hogy a fókuszhoz bármely érintőre vonatkozó tengelyes tükröképe a vezérvonalon van, következik parabolánál, hogy a vezéregyenesnek bármely érintőre vonatkozó tengelyes tükröképe átmegy a fókuszon. Kapcsoljuk ezt a tényt 6.–9. TÉTELeinkhez:

12. TÉTEL. *A parabola bármely három érintője által meghatározott háromszög magasságpontja rajta van a vezéregyenesen.*

13. TÉTEL. *A parabola bármely három érintője által meghatározott háromszög körülírt körén rajta van a fókusz.*

★

6. feladat. Szerkesszük meg a parabola vezéregyenesét és fókuszát, ha adott a parabola négy érintője!

7. feladat. Egy parabola két érintője akkor és csakis akkor merőleges egymásra, ha az érintési pontokat összekötő egyenes átmegy a fókuszon, és a két érintő metszéspontja rajta van a vezéregyenesen.

★

Egyenes és kúpszelet közös pontjainak meghatározása.

Legyen adott a vezérvonal, a fókusz és egy g egyenes. Keressük a kúpszelet és g közös pontjait. Vagyis keressük azoknak a köröknek a középpontjait, amely körök érintik a vezérvonalat, átmennek a fókuszon és a középpontjuk rajta van a g egyenesen. Így a g egyenes a keresett körök átmérőegyenese, tehát ha átmegy a kör a fókuszon, akkor átmegy a fókuszhoz g -re vonatkozó tengelyes tükröképén is. Feladatunk tehát parabolánál: szerkesztendő kör, amelyik átmegy két adott ponton és érint egy adott egyenest. Hiperbolánál és ellipsziszén: szerkesztendő kör, amelyik átmegy két adott ponton és érint egy adott kört.

Ha a fókusz tükröképe éppen a vezérvonalra esik, akkor a g egyenes éppen érintő és az érintési pont szerkesztése az ábráról leolvasható. Ha a vezérvonal elválasztja egymástól a fókuszról és annak g -re vonatkozó tengelyes tükröképét, akkor nyilván nincs olyan kör, tehát a g egyenesnek minden pontja külső pont. Ha a fókusz és a g -re vonatkozó tengelyes tükröképe a vezérvonal ugyanazon partjára esik, akkor két ilyen kör van, így a g egyenesnek a kúpszelettel két metszéspontja van.

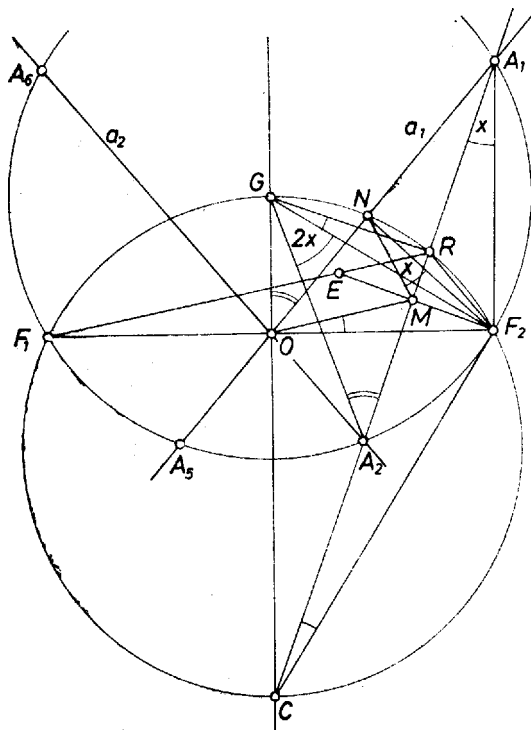
Parabola esetén jelöljük F -nek g -re vonatkozó tengelyes tükröképét G -vel, továbbá az FG egyenes és a vezéregyenes metszéspontját M -mel. Ekkor MG és MF mértani közepe szerkeszthető, a vezéregyenesen M -től mértani közép-távolságra levő pontok legyenek M_1 és M_2 . M_1 -ben, ill. M_2 -ben a vezéregyenesre állított merőlegeseknek g -vel való metszéspontjai legyenek R_1 és R_2 . Ezek éppen g és a parabola közös pontjai.

★

A parabolának nyilván nincs konvex burka, tehát a parabolához kell ideális pontot rendelni. Mármint, ha az FG egyenes és a d vezéregyenes M metszéspontja létezik, vagyis FG nem párhuzamos d -vel, akkor az egyenesnek vagy minden pontja külső pont, vagy érintő, vagy szelő két metszésponttal. Ha viszont FG párhuzamos d -vel, vagyis a g egyenes a parabola tengelyével párhuzamos, akkor egy közös pont biztosan van; ettől g -n a vezéregyenesestől távolodva, a félegyenes minden pontja a fókuszhoz van közelebb, tehát belső pont. Így kézenfekvő, hogy a tengely ideális pontját csatoljuk a parabolához. Az ideális egyenes most a parabola érintője lesz, mert a tengely ideális pontja görbepont, az összes többi pontja a parabola szempontjából külső pont, hiszen minden egyenesen egy helytől kezdve minden pont d -hez van közelebb.

Térjünk vissza most a hiperbolához. A 8. ábra mutatja egy hiperbolapont és a hozzá tartozó érintő megszerkesztését. Legyenek most F_2 -ből a vezérkörhöz húzható érintők érintési pontjai G_1 és H_1 . F_2G_1 , ill. F_2H_1 felező merőlegese párhuzamos F_1G_1 -gyel, ill. F_1H_1 -gyel. E felező merőlegések átmennek a hiperbola O középpontján, és F_2G_1 és F_2H_1 a főkörnek is érintői; az érintési pontok legyenek G , ill. H . Az OG és OH egyenesek minden közös pontja külső pont, hiszen ha K ezen egyenesek egyikének pontja, akkor az F_1G_1K háromszögben két oldal különbsége kisebb, mint $F_1G_1 = 2a$. F_2 -nek ezen egyenesekre vonatkozó tengelyes tükörképei a vezérkörön vannak, ezért OG és OH a hiperbola két ideális pontjához tartozó érintő, a hiperbola két aszimptotája. Az OGF_2 háromszöget a GOF_2 szög felezőjére tükrözve OAC háromszöget kapjuk, A a hiperbola egyik tengelypontja, $AC = b$; $OC = OF_2 = OF_1 = c$.

Legyen most adva F_1 , F_2 és a két aszimptota – ezek egymás tengelyes tükörképei F_1F_2 -re vonatkozóan.



9. ábra

A 9. ábrán F_1F_2 felező merőlegesén tetszőlegesen felvéve a G pontot és megrajzolva a G középpontú $GF_1 = GF_2$ sugarú kört; ez az a_1 egyenest A_1 és A_5 ; az a_2 egyenest A_2 és A_6 pontokban metszi. Az A_1A_2 és OG metszéspontja C ; A_1A_2 felezőpontja R . 14. TÉTEL. Az A_1A_2 egyenes az F_1RF_2 szög felezője.

Bizonyítás. Az állítás igazolására elég belátni, hogy F_1RF_2C húrnégyszög. G rajta van A_1OA_2 körülírt körén, mert G e háromszög külső szögfelezőjének és A_1A_2 felező merőlegesének metszéspontja. C e két kör hatványvonalának pontja, tehát C -ből a G középpontú körhöz húzható érintő hossza CO és CG mértani közepe; és ezért CG átfogója annak a derékszögű háromszögnek, amelynek egyik befogója az érintő, és ennek CG -re eső vetülete CO . Így CG Thalész-köre F_1 és F_2 pontokban metszi az F_1F_2 egyenest. Ezen a Thalész-körön R is rajta van, mert $GRC \sphericalangle = 90^\circ$.

15. TÉTEL. R pontja annak a hiperbolának, amelynek a fókuszai F_1 , F_2 , aszimptotái a_1 , a_2 , és így valós féltengelye $ON = a$, ahol N az F_2 fókusz vetülete az a_1 aszimptotán.

Bizonyítás. A 9. ábrán F_2 -nek az A_1A_2 egyenesre vonatkozó tengelyes tükörképe E , F_2E és A_1A_2 metszéspontja M , ezért OM párhuzamos F_1R -rel, és $2OM = F_1E$. Az állítás igazolására be kell látni, hogy $OM = a$.

Ha megmutatjuk, hogy $NOM \sphericalangle = 2x$ ($x = MNF_2 \sphericalangle$), akkor készen vagyunk, mert $ONF_2 \sphericalangle = 90^\circ$, így x szög érintő szárú kerületi szög, hiszen a $2x$ szög ekkor középponti szög.

A_1F_2 Thalész-körén rajta van az N és az M pont, így $MA_1F_2 \sphericalangle = A_2A_1F_2 \sphericalangle = x$; de $A_2GF_2 \sphericalangle = 2x$, mert az A_2F_2 -höz tartozó középponti szög.

CF_2 Thalész-körén van O és M , így $MOF_2 \sphericalangle = MCF_2 \sphericalangle = RCF_2 \sphericalangle = RGF_2 \sphericalangle$. Tekintve, hogy A_2OGA_1 húrnégyszög, $GA_2A_1 \sphericalangle = GOA_1 \sphericalangle$.

A GRA_2 derékszögű háromszögben $RGF_2 \sphericalangle + GA_2R \sphericalangle + 2x = 90^\circ$. Az O -nál levő derékszögből a két három betűs szög megegyezik, így $NOM \sphericalangle = 2x$. 16. TÉTEL. A hiperbola érintőjének az aszimptoták közti szakaszát az érintési pont felezi.

A_1A_2 -ről beláttuk, hogy a hiperbola R pontbeli érintője, mert az F_1RF_2 szög felezője. 17. TÉTEL. A hiperbola

bármely szelőjén az aszimptoták közti szakasz felezőpontja egyben a szelőre eső húr felezőpontja.

A hiperbolánál és ellipsziszénél a párhuzamos hurok felezőpontjai egy, a középponton átmenő egyenesen vannak.

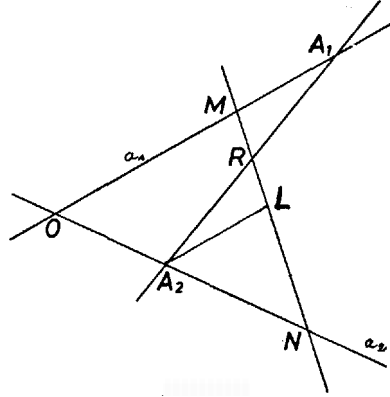
Így az A_1A_2 -vel párhuzamos hurok felezőpontjai az OR egyenesre esnek. Ez súlyvonala azon háromszögeknek, amelyeknek két oldala a két aszimptota, harmadik oldala pedig párhuzamos A_1A_2 -vel.

Ezzel az állítást arra az esetre igazoltuk, amikor a szelő az egyik ág szelője.

18. TÉTEL. Az A_1OA_2 háromszög területe állandó – tehát nem függ attól, hogy az F_1 és F_2 -n átmenő körök közül melyiket rajzoltuk meg.

$$t = \frac{1}{2}OA_1 \cdot OA_2 \sin 2u = OA_1 \cdot OA_2 \sin u \cos u = c^2 \sin u \cos u = ab,$$

ahol $u = \angle F_2OA_1$. 19. TÉTEL. Az A_1OA_2 háromszög a minimális területű mindazon háromszögek között, amelynek két oldalegyenes a_1 és a_2 , a harmadik oldal pedig átmegy az R ponton.



10. ábra

A 10. ábrán tekintsük az OMN háromszöget. Legyen M -nek R -re vonatkozó középpontos tükröképe L , ekkor az OMN háromszög területe az A_2LN háromszög területével nagyobb az OA_1A_2 háromszög területénél.

20. TÉTEL. Az R pontnak az aszimptotáktól mért távolságainak a szorzata állandó.

Jelöljük R távolságát a_1 -től r_1 -gyel, a_2 -től r_2 -vel. OR mint súlyvonal felezi az OA_1A_2 háromszög területét:

$$OA_1 \cdot r_1 = ab; \quad OA_2 \cdot r_2 = ab;$$

tehát

$$OA_1 \cdot OA_2 \cdot r_1 \cdot r_2 = a^2b^2.$$

De

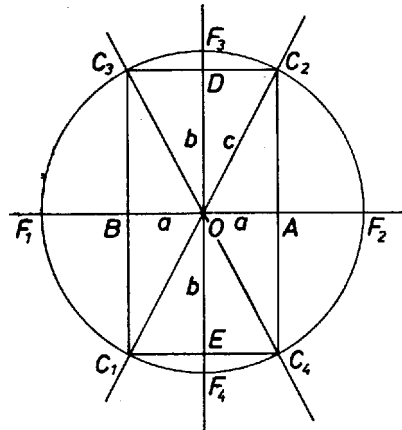
$$OA_1 \cdot OA_2 = OA_1 \cdot OA_2 = c^2,$$

így

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{a^2b^2}{c^2}.$$

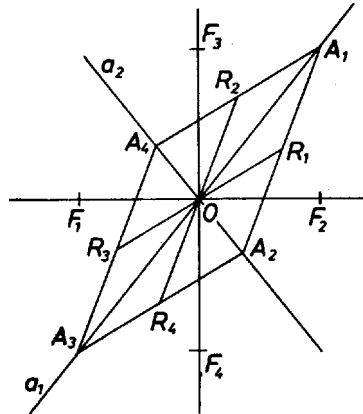
★

A 11. ábrán két, közös aszimptotájú hiperbola fókuszai és tengelyei láthatók úgy, hogy a két-két fókusz távolsága ugyanaz. A két aszimptota a téglalapot 4, egyenként ab területű háromszögre bontotta.



11. ábra

Tekintsük azokat a pontokat, amelyeken át húzható egyenesekkel minimális ab területű háromszögek alakíthatók ki a két aszimptotával mint oldallal. Az előbbieket alapján két ilyen hiperbolát kapunk. Az egyiknek F_1 és F_2 lesz a két fókusza, A és B a két tengelypontja; a másiknak F_3 és F_4 a két fókusza, D és E a két tengelypontja. E két hiperbolát egymáshoz képest konjugáltaknak nevezzük.



12. ábra

A 12. ábrán az A_1OA_2 és az A_1OA_4 terület egyenlő, így R_2 a konjugált hiperbola egy pontja: OR_1 és OR_2 két konjugált félátmérő.

★

Apollonius tételei: A konjugált félátmérők által kifeszített paralelogramma területe állandó. $OR_1A_1R_2$ területe egyenlő az A_1OA_2 területtel.

A konjugált félátmérők négyzetének különbsége konstans.

$$\overrightarrow{OR_1} + \overrightarrow{OR_2} = \overrightarrow{OA_1}; \quad \overrightarrow{OR_1} + \overrightarrow{OR_4} = \overrightarrow{OR_1} - \overrightarrow{OR_2} = \overrightarrow{OA_2}.$$

A két vektoregyenlet skaláris szorzata:

$$\overrightarrow{OR_1}^2 - \overrightarrow{OR_2}^2 = \overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OA_2} = c^2 \cos 2u = c^2 (\cos^2 u - \sin^2 u) = a^2 - b^2.$$

★

Hátra van még a 17. TÉTEL igazolása arra az esetre, amikor a szelő egyik metszéspontja az egyik ágon, másik metszéspontja a másik ágon van. Tekintsük ekkor az A_1A_4 egyenessel párhuzamos szelőket, ezeknek a felezőpontjai az OR_2 egyenesen lesznek (12. ábra). Az OR_2 egyenes azonban súlyvonala mindazon háromszögeknek, amelyeknek két oldalegyenese a két aszimptota, harmadik oldala pedig párhuzamos A_1A_4 -gyel.

★

A bebizonyított állításokból következik, hogy a hiperbolára a szokásos – fokális – definíciója helyett adhatók vele ekvivalens más definíciók is:

Adott egy $2a$, $2b$ oldalú téglalap és az átlók egyik szögfelezője. A hiperbola azon pontok halmaza abban a két szögtartományban, amelyiket a szögfelező felez, amely pontokon át húzott egyenesek az átlókkal minimális ab területű háromszögeket határoznak meg.

A hiperbola azon pontok halmaza abban a két szögtartományban, amelyet a szögfelező felez, amelyeknek a két átlótól való távolságának szorzata $\frac{a^2b^2}{c^2}$, ahol c a téglalap félátlójának hossza.