Az 1983. évi diákolimpia negyedik feladata a következő volt.

Legyen ABC egyenlő oldalú háromszög! Álljon az E halmaz az AB, BC és CA zárt szakaszok összes pontjából! Igaz-e, hogy bármilyen módon osztjuk is fel E-t két diszjunkt részhalmazra, ezeknek a részhalmazoknak legalább egyikében mindig van három olyan pont, amelyek egy derékszögű háromszög csúcspontjai?

A továbbiakban ennek a feladatnak néhány általánosításáról lesz szó. Megvizsgáljuk, hogy milyen háromszögek kerületére létezik a feladat feltételeinek megfelelő két részhalmazra osztás, majd foglalkozunk néhány olyan esettel, amikor E nem egy háromszög, hanem valamilyen más síkidom kerületének pontjaiból áll. Az említett két részhalmazra osztás színezéssel tehető szemléletessé: az egyik részhalmaz pontjait fessük piros, a másik részhalmaz pontjait pedig kék színűre. Nevezzük az E halmaz egy színezését *jónak*, ha nincs olyan derékszögű háromszög, melynek csúcsai egyszínű E-beli pontok lennének.

1. Tétel: Hegyesszögű háromszög kerületének nincsen jó színezése.

Elsőként megmutatjuk, hogy ha az ABC háromszög kerületét sikerült jól színezni, akkor az AB oldalra legalább két piros pont esik. Állításunkat indirekt módon láthatjuk be. Tegyük fel ugyanis, hogy az AB szakasz pontjai a P pont kivételével kékek. A P pontról nem tudjuk, hogy kék vagy piros. Ekkor az AC és BC szakaszok bármely pontjának AB-n vett merőleges vetülete $-$ ABC hegyesszögű lévén $-$ az AB szakasz belsejébe vagy határára esik. Vegyük az AC vagy BC szakasz egy tetszőleges, A-tól és B-től különböző R pontját. Ha $R^{'}$ ennek a pontnak az AB-re eső merőleges vetülete, és $R^{'}$ nem azonos P-vel, akkor R csak piros lehet, mert ellenkező esetben R, $R^{'}$ és az AB szakasz még egy tetszőleges kék pontja egy egyszínű derékszögű háromszög csúcsai lennének. Tehát ekkor AC és CB pirosak, kivéve esetleg azt az egyetlen Q pontot, melynek merőleges vetülete P. (Q színét szintén nem ismerjük.) Feltehető, hogy Q pl. a BC oldalra illeszkedik (lehet $Q = C$ is), BC egy tetszőleges, Q-tól különböző X belső pontját véve, X piros; AC-re eső merőleges vetülete, amit Y-nal jelölünk, szintén piros, Y az AC oldal belső pontja és AC egy tetszőleges, Y-tól különböző Z belső pontja szintén piros, ugyanakkor YXZ háromszög derékszögű. Ellentmondásra jutottunk, tehát az AB oldalon csakugyan van legalább két piros pont.

1984-03-103-1.eps

Hasonló módon bármely oldalról beláthatjuk, hogy van rajta legalább két piros, ill. legalább két kék pont. Ebből könnyen adódik, hogy jó színezés esetén a kerület egy pontja, és valamely oldalra eső merőleges vetülete különböző színűek.

1984-03-103-2.eps

Tegyük fel ugyanis, hogy pl. mind P, mind az AB-re eső Q merőleges vetülete piros. Az előbb bizonyítottak szerint AB-n legalább két piros pont van, létezik tehát Q-tól különböző R piros pont is, ugyanakkor PQR derékszögű háromszög, és így ellentmondásra jutottunk.

1984-03-103-3.eps

Ezután megmutatjuk, hogyan lehet olyan $A_0B_0C_0$ háromszöget szerkeszteni, melyre A_0, B_0, C_0 az ABC háromszög kerületének pontjai, $A_0B_0 \perp AC$, $B_0C_0 \perp AB$ és $A_0C_0 \perp BC$. Legyen C_T a C-hez tartozó magasságtalppont, és vegyük az AC_T szakasz tetszőleges C_1 belső pontját. A C_1-ben az AB-re állított merőleges messe AC-t a B_1-ben, C_1 merőleges vetülete BC-n legyen A^*, B_1-ben AC-re állított merőleges messe a C_1A^* egyenest A_1-ben. Az $A_1B_1C_1$ háromszög rendelkezik a megkívánt merőlegességi tulajdonságokkal, csak A_1 nem feltétlenül illeszkedik BC-re. Legyen AA_1 és BC metszéspontja A_0. Az A középpontú, $\dfrac{AA_0}{AA_1}$ arányú nagyítás $A_1B_1C_1$ háromszöget éppen a kívánt tulajdonságú $A_0B_0C_0$ háromszögbe viszi.

Tegyük fel, hogy ABC hegyesszögű háromszög kerületének van jó színezése. Tekintsük az így meghatározott A_0, B_0, C_0 pontokat. A fentiek szerint A_0, B_0 és C_0 színe páronként különböző, hiszen e pontok egymás merőleges vetületei. Ugyanakkor csak két színünk van, így A_0, B_0 és C_0 színe közül legalább kettő megegyezik. Ellentmondásra jutottunk, tehát csakugyan nem létezhet jó színezés.

Mivel a szabályos háromszög is hegyesszögű, így az említett diákolimpiai feladat kérdésére adott válasz nemleges.

2. Tétel: Derékszögű háromszög kerületének nincs jó színezése.

Legyen az ABC háromszögben a derékszög A-nál, és tegyük fel, hogy a háromszögnek mégis van jó színezése.

1984-03-104-1.eps

Feltehető, hogy A kék. Ha mindkét befogón lenne A-tól különböző kék pont, akkor ezek A-val együtt egy derékszögű háromszög egyszínű csúcsai lennének. Tehát a két befogó egyikén – mondjuk AB-n – nincs több kék pont, minden A-tól különböző pont piros. Ha BC átfogó valamely P belső pontja piros lenne, akkor AB-re eső Q merőleges vetülete és a B csúcs három olyan piros pont lenne, ami egyszínű derékszögű háromszöget határoz meg. Tehát BC minden belső pontja kék. Ekkor azonban A merőleges vetülete BC-n, A_1 és BC még egy tetszőleges belső pontja egy derékszögű háromszög csúcsai, kékek. Ismét ellentmondásra jutottunk, a tételt bebizonyítottuk.

3. Tétel: Tompaszőgű háromszögnek van jó színezése.

Színezzük például a leghosszabb oldalt kékre, a másik kettőt pirosra. Mivel az összes kék pont egy egyenesre esik, így kék csúcsú derékszögű háromszög szóba sem jöhet.

1984-03-104-2.eps

Válasszunk ki a piros pontok közül tetszőlegesen hármat, A_1, B_1, C_1-et. Feltehető, hogy közülük kettő: A_1 és C_1 az AC oldalra esik és C_1 van közelebb C-hez. Ha $A_1B_1C_1$ derékszögű háromszög lenne, akkor B_1 nem eshetne AC-re, így csak BC belső pontja lehetne. Mivel C-ben az AC-re állított merőleges az ACB szög belsejében halad, így B_1 és A_1C_1 ennek az egyenesnek különböző oldalaira esnek. Emiatt A_1 és B_1 a C_1-ben AC-re álltott merőlegesnek is különböző oldalaira esnek, azaz $A_1C_1B_1 > 90°$, így $A_1B_1C_1$ háromszög nem lehet derékszögű. Tehát csakugyan jó a megadott színezés.

Most néhány más síkidom kerületének színezésével foglalkozunk.

4. Tétel: Négyzet kerületének nincsen jó színezése.

Jelöljük a négyzet csúcsait A, B, C, D-vel. Ha ezek közül három egyszínű, akkor a színezés máris „rossz”. Tehát két piros és két kék pont van köztük. Ha a két piros és a két kék pont egy-egy oldal két végpontja, pl. A és D kék, B és C piros, akkor a DC oldal egy tetszőleges P pontja nem lehet sem kék (ADP háromszög miatt), sem piros (a BCP háromszög miatt). Tehát egy jó színezésben a két-két egyszínű csúcs csak átlósan helyezkedhet el.

1984-03-105-1.eps

1984-03-105-2.eps

Tekintsük az A_1, B_1, C_1, D_1 oldalfelező pontokat. A_1 és C_1 közül legalább az egyik piros, másképp A_1C_1C derékszögű háromszög csúcsai kékek lennének. Feltehető, hogy például A_1 piros, ekkor az A_1BC_1 háromszögből C_1 kék. Ekkor azonban B_1 sem piros (A_1BB_1 háromszög miatt), sem kék (C_1CB_1 háromszög miatt) nem lehet. Ellentmondásra jutottunk, tehát a négyzetnek nincsen jó színezése.

5. Tétel: Kör kerületének van jó színezése.

Legyen például az AB átmérő A végpontja kék, B végpontja piros, az egyik AB félkör belső pontjai pirosak, a másik AB félköré kékek. Ekkor bármely átmérő egyik végpontja kék, a másik piros. Tetszőleges P, Q, R pontokat kiválasztva, ha PQR háromszög derékszögű, akkor Thalész tétele szerint valamelyik kettő, pl. P és Q, egy átmérő két végpontja, így különböző színű.

1984-03-105-3.eps

Érdekes módon ez a tétel szolgáltat alapötletet a következő tételhez:

6. Tétel: A szabályos $2n$-szög kerületének nincs jó színezése.

$n = 2$-re az állítást a 4. tétel mondja ki. $n \geqq 3$ esetén megrajzoljuk a $2n$-szög körülírt körét. Először belátjuk, hogy jó színezés esetén bármely kettő, egy átmérőn fekvő csúcsnak különböző színűnek kell lennie.

Tegyük fel ugyanis, hogy két egy átmérőn levő csúcs pl. piros. Thalesz tétele szerint bármely más csúcsot hozzávéve e két csúcshoz, derékszögű háromszöget kapunk. Így az összes többi csúcs kék, és így van olyan átmérő, melynek mindkét végpontja kék csúcs, továbbá ezen kívül is van kék csúcs (a kék csúcsok száma $2n - 2 \geqq 2 \cdot 3 - 2 = 4$), így van olyan derékszögű háromszög, melynek mindhárom csúcsa kék, ami lehetetlen. Tehát csakugyan az egy átmérőn levő csúcsok különböző színűek. Mivel eszerint nem minden csúcs egyszínű, így van két szomszédos különböző színű csúcs, pl. A kék és B piros szomszédos csúcsok. Legyen $A^{'}$ az A tükörképe a körülírt kör O középpontjára, és B tükörképe O-ra $B^{'}$. Ekkor $A^{'}$ piros és $B^{'}$ kék. Így az AB oldal tetszőleges P belső pontja nem lehet sem kék ($PAB^{'}$ háromszög miatt), sem piros ($PA^{'}B$ háromszög miatt). Tehát csakugyan nincsen jó színezés.

1984-03-106-1.eps

Végül bebizonyítjuk, hogy

7. Tétel: Szabályos n-szög kerületének nincsen jó színezése.

Ha n páros, akkor állításunk a 6. tétel szerint igaz. Ha n páratlan, akkor vegyünk fel egy szabályos $2n$-szöget, melynek csúcsai valamelyik körüljárási irány szerint P_0, $P_1, \ldots, P_{2n-1}$. A P_0P_1, $P_2P_3, P_4P_5, \ldots, P_{2n-2}P_{2n-1}$ egyenesek egy szabályos n-szög oldalegyenesei, ezt a szabályos n-szöget megfelelő nagyítással átvihetjük bármely szabályos n-szögbe, így a színezhetőséget vizsgálhatjuk ezen a szabályos n-szögön is.

1984-03-106-2.eps

A konstrukció szerint a P_{2k} és P_{2k+1} pontok $(k=0,1,\ldots,n-1)$ egy oldalon vannak. Az előbbi tételből látott módon $-$ $P_0P_1\ldots P_{2n-1}$ körülírt körének megrajzolásával $-$ belátható, hogy a P_k és P_{k+n} pontok különböző színűek ($k+n>2n$ esetén P_{k+n} helyett P_{k+n-2n} értendő). Mivel eszerint az összes P_i pont nem lehet mind egyszínű, így van olyan i, hogy P_i és P_{i+1} különböző színűek, mondjuk P_i piros, P_{i+1} kék. Ekkor P_{n+i} kék és P_{n+i+1} piros. Ha i páros, akkor P_i és P_{i+1} egy oldalon vannak, ha i páratlan, akkor $n+i$ páros, és így P_{n+i} és P_{n+i+1} vannak egy oldalon. A szimmetria miatt feltehető, hogy i páros. Ekkor a P_iP_{i+1} szakasz része az n-szög egy oldalának és tetszőleges Q belső pontja nem lehet sem kék ($P_{i+1}QP_{n+i}$ háromszög miatt), sem piros (P_iQP_{n+i+1} háromszög miatt). Tehát a szabályos n-szög kerülete ez esetben sem lesz jól színezhető.

1984-03-106-3.eps

Megjegyezzük, hogy a 6. és 7. tételből egy újabb megoldás olvasható ki az eredeti olimpiai feladatra. A 4., 6. és 7. tételek bizonyításában lényegében egy erősebb állítást láttunk be: a 4. és a 6. tétel szerint már egy tetszőleges $2n$-szög csúcsaiból és oldalfelező pontjaiból álló pont $4n$-esnek sincs jó színezése (a bizonyításban belső pont az oldal felezőpontja is). A 7. tételben pedig beláttuk, hogy a páratlan oldalú szabályos n-szög kerületén felvehető $2n$ szög csúcsainak és az oldalfelező pontoknak sincsen jó színezése. $n=3$-ra ez azt jelenti, hogy már a szabályos háromszög oldalharmadoló és oldalfelező pontjaiból álló 9 elemű ponthalmaznak sincsen jó színezése. Ez általában is így van: egy alakzatnak akkor és csak akkor nincs jó színezése, ha van olyan véges része, amit nem lehet jól színezni.