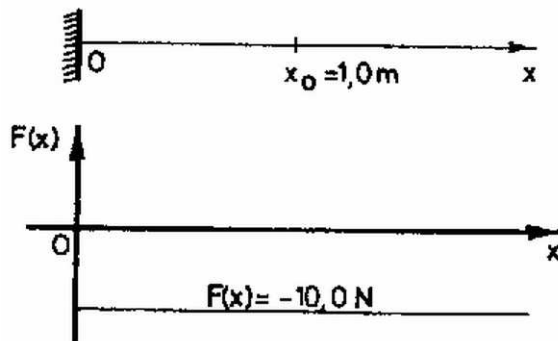


A XIV. Nemzetközi Fizikai Diákolimpia feladatai

Elméleti feladatok

1. Egy részecske egydimenziós mozgást végez az OX pozitív féltengely mentén. A részecskére ható $F(x)$ erőt az 1. ábra mutatja. Az O origóban egy tökéletesen visszaverő fal van. Ugyanakkor a részecskére mindenhol hat egy súrlódási erő is, amelynek nagysága $F_f = 1,00$ N. A részecske az $x = x_0$ pontból indul $E_0 = 10,0$ J kinetikus energiával.

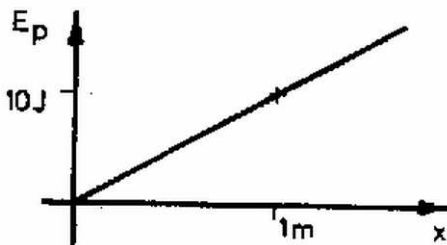


1. ábra

- Határozzuk meg, milyen hosszú utat tesz meg a részecske a végleges megállásig!
- Ábrázoljuk grafikusán a részecske $U(x)$ helyzeti energiáját az $F(x)$ erőterben!
- Ábrázoljuk kvalitatívan a részecske sebességét az x koordináta függvényében!

Megoldás. a) A grafikonról leolvashatjuk, hogy a számunkra érdekes $x > 0$ tartományban az $F(x)$ erő nem függ x -től, tehát egy $F = 10$ N nagyságú, balra ható erőről van szó. $x > 0$ esetén a részecskére ható súrlódási erő kisebb, mint az F erő, ezért a részecske csak az origóban állhat meg véglegesen. A visszaverő falon addig fog pattogni, amíg a helyzeti és mozgási energiája teljes egészében a súrlódási erő ellen végzett munkává alakul, azaz $F_f s = x_0 F + E_0$, ahol s a megállásig megtett út, $x_0 F$ pedig a helyzeti energia megváltozása az indulás és a megállás között. Az egyenletből s -et kifejezve és az adatokat behelyettesítve $s = 20$ m-t kapunk.

b) Állandó erő által létrehozott erőterben a helyzeti energia $E_P = Fx + c$, ahol c tetszőleges állandó. c -t nullának választva, a keresett grafikon a 2. ábrán látható.



2. ábra

c) Ha a részecske balra mozog, akkor a gyorsulása $a = -(F - F_f)/m$. Ha x' -vel jelöljük azt a helyet, ahonnan balra indul, akkor a helyére és sebességére a következő egyenleteket írhatjuk fel:

$$x = (a/2)t^2 + x'; \quad v = at.$$

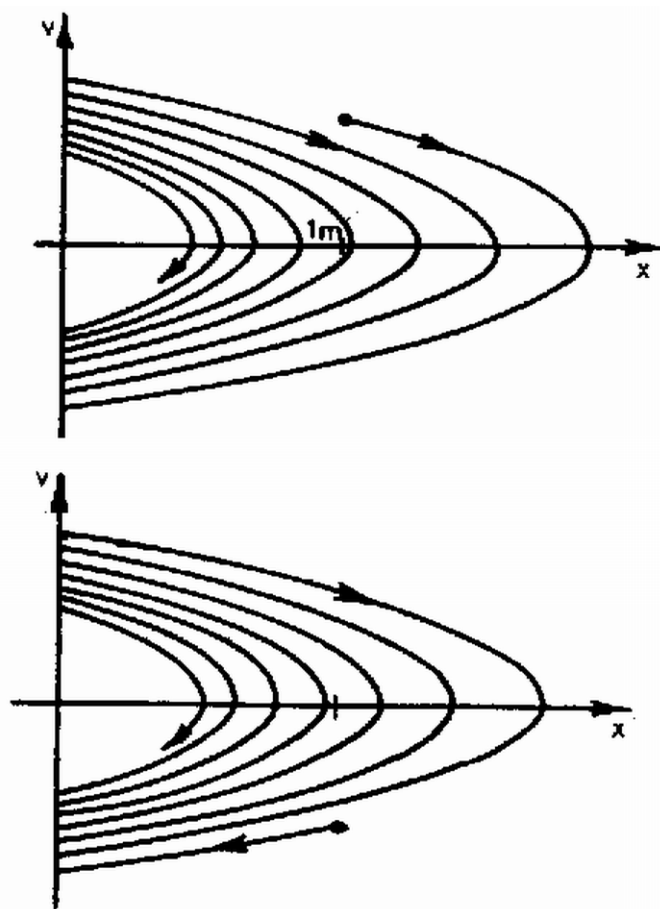
A három egyenletből

$$(1) \quad v = -\sqrt{(x - x')2 \frac{F_f - F}{m}}.$$

Ha a részecske jobbra mozog, akkor $a = -(F + F_f)/m$. v' -vel jelölve azt a sebességet, amellyel a falról visszapattan, helyének és sebességének egyenlete most $x = (a/2)t^2 + v't$; $v = at + v'$, innen

$$(2) \quad v = \sqrt{(v')^2 - 2 \frac{F + F_f}{m} x}.$$

Az (1) és (2) függvények a $\sqrt{x}$ függvény transzformáltjai, tehát paraboladarabok. Attól függően, hogy a testet az x_0 pontból balra vagy jobbra indítjuk, kétféle mozgás lehetséges. A két esetben a keresett $v(x)$ grafikon a 3. ábrán ábrázoltuk kvalitatívan. (8 pont)



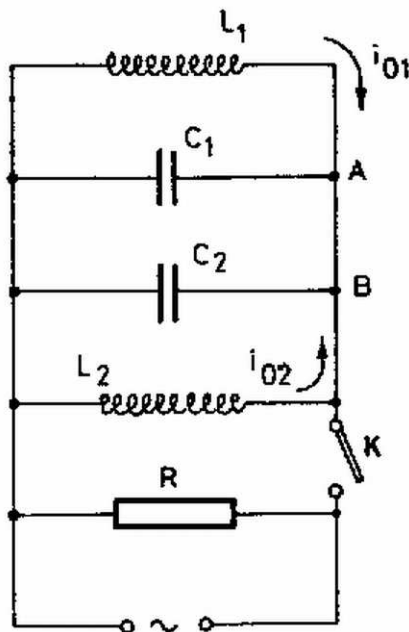
3. ábra

2. A 4. ábra szerinti áramkörben $L_1 = 10 \text{ mH}$, $L_2 = 20 \text{ mH}$, $C_1 = 10 \text{ nF}$, $C_2 = 5 \text{ nF}$ és $R = 100 \text{ k}\Omega$. A K kapcsoló hosszabb ideje zárva van. Az áramforrás f változtatható frekvenciájú szinuszos áramot ad, de az áramforrás áramerősségének amplitúdója állandó.

a) Jelöljük f_m -mel a maximális hatásos teljesítményhez (P_m -hez) tartozó frekvenciát és f_+ -szal, ill. f_- -szal az $(1/2)P_m$ -hez tartozó frekvenciákat! Határozzuk meg f_m , és $\Delta f = f_+ - f_-$ arányát!

A K kapcsolót kinyitjuk. A kapcsoló nyitása után egy t_0 pillanatban az L_1 és L_2 -n átfolyó áramerősségek $i_{01} = 0,1 \text{ A}$, $i_{02} = 0,2 \text{ A}$ és a feszültség $U_0 = 40 \text{ V}$.

- Számítsuk ki az áramkör $L_1 C_1 C_2 L_2$ része sajátrezgésének a frekvenciáját!
- Határozzuk meg az AB vezetõben az áramerõsséget!
- Számítsuk ki az L_1 tekercsben az áramerõség rezgésének amplitúdóját!



4. ábra

Megoldás. a) Jelöljük Z -vel az áramkör eredő impedanciáját! A párhuzamos kapcsolás miatt $\frac{1}{Z^2} = \frac{1}{R^2} + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2$, ahol $C = C_1 + C_2$ és $L = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$ az eredő kapacitás és induktivitás.

A hatásos teljesítmény:

$$(1) \quad P = \frac{U^2}{R} = \frac{I^2 Z^2}{R} = \frac{I^2}{R} \frac{1}{\frac{1}{R^2} + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}.$$

Ebből látható, hogy P akkor maximális, ha $C\omega - \frac{1}{L\omega} = 0$, azaz a rezgőkör rezonanciában van. Így $f_m = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

Szintén az (1) összefüggésből olvashatjuk le, hogy a teljesítmény akkor lesz a maximális fele, ha $\frac{1}{R^2} = \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2$, azaz

$$\frac{1}{R} = C\omega_+ - \frac{1}{L\omega_+} \quad \text{és} \quad -\frac{1}{R} = C\omega_- - \frac{1}{L\omega_-}.$$

Átalakítva:

$$\omega_+ - \omega_- = \frac{1}{RC}, \quad \text{így} \quad \Delta f = \frac{1}{2\pi RC}.$$

Az eredmény

$$\frac{f_m}{\Delta f} = R\sqrt{\frac{C}{L}} = 150.$$

b) A megadott adatokkal $L_1 C_1 = L_2 C_2$, tehát az $L_1 C_1$ és az $L_2 C_2$ rezgőkör ugyanazzal a frekvenciával oszcillál egymástól függetlenül. A sajátrezgés frekvenciája tehát

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1 C_1}} = 15,9 \text{ kHz}.$$

c) A két rezgőkör függetlensége miatt az AB ágba nem folyik szinuszos áram. A tekercsek ellenállása egyenárammal szemben zérus, ezért egyenáram folyhat az AB ágba. Jelöljük i_{c_1} és i_{c_2} -vel a t_0 időpillanatban a C_1 kondenzátorból A -ba, ill. a C_2 -ből B -be folyó áramerősséget!

$$i_{c_1} = C_1 \frac{\Delta U}{\Delta t} \quad \text{és} \quad i_{c_2} = C_2 \frac{\Delta U}{\Delta t},$$

$$\text{így} \quad i_{c_1} = \frac{C_1}{C_2} i_{c_2}, \quad \text{azaz} \quad i_{c_1} = 2i_{c_2}.$$

Az A és B pontokra a csomóponti törvény:

$$i_{AB} = i_{01} + i_{C_1}; \quad i_{AB} = -i_{02} - i_{C_2}.$$

Az utóbbi három egyenletből

$$i_{AB} = \frac{i_{01} - 2i_{02}}{3} = -0,1 \text{ A}.$$

d) Jelöljük r indexszel azt az áramerősséget, amit a rezgőkör rezgése hoz létre! $i_{01r} = i_{01} - i_{AB} = 0,2 \text{ A}$.

Az $L_1 C_1$ rezgőkörben az energiamegmaradás szerint

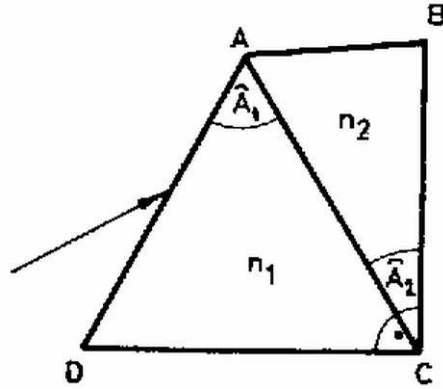
$$L_1 \frac{i_{1r\max}^2}{2} = L_1 \frac{i_{01r}^2}{2} + C_1 \frac{U_0^2}{2}.$$

A keresett áramerősséget kifejezve:

$$i_{1r\max} = \sqrt{i_{01r}^2 + \frac{C_1}{L_1} U_0^2} = 0,204 \text{ A}.$$

(8 pont)

3. Két prizmat, amelyek törésszöge $\hat{A}_1 = 60^\circ$, $\hat{A}_2 = 30^\circ$, az 5. ábrának megfelelő módon összeragasztottunk ($\hat{C} = 90^\circ$). A törésmutatókat a következő képletek adják meg: $n_1 = a_1 + b_1/\lambda^2$; $n_2 = a_2 + b_2/\lambda^2$, ahol $a_1 = 1,1$; $b_1 = 10^5 \text{ nm}^2$; $a_2 = 1,3$; $b_2 = 5 \cdot 10^4 \text{ nm}^2$.



5. ábra

a) Határozzuk meg azt a λ_0 hullámhosszat, amelyre bármely irányból érkező fénysugár törés nélkül halad át az AC felületen! Határozzuk meg az ehhez az esethez tartozó n_1 és n_2 törésmutatókat is!

b) Rajzoljuk meg, hogy hogyan halad át a prizmarendszeren az ábra szerint beérkező, három különböző fénysugár, amelyek hullámhossza $\lambda_{\text{vörös}}$, λ_0 , és $\lambda_{\text{kék}}$! Legyen a fénysugarak beesési szöge azonos!

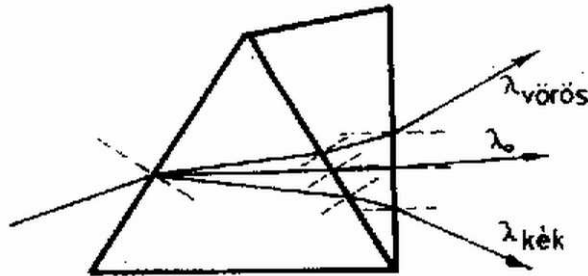
c) Határozzuk meg, hogy a λ_0 hullámhosszú sugárzásra mekkora a prizmarendszer legkisebb eltérítési szöge!

d) Határozzuk meg, hogy milyen hullámhosszú sugárzás esetén lehetséges, hogy a DC alappal párhuzamosan belépő fénysugár DC-vel párhuzamosan maradjon a prizmarendszer elhagyása után is!

Megoldás. a) Az AC felületre különböző irányból érkező λ_0 hullámhosszú fénysugarak akkor nem törnek meg, ha

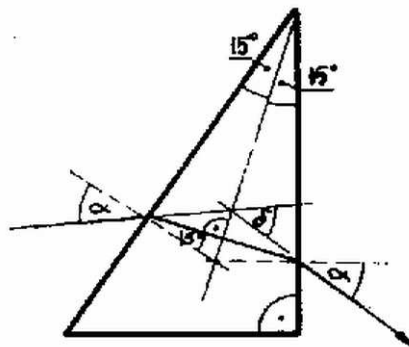
$$n_1 = n_2, \text{ azaz } a_1 + b_1/\lambda_0^2 = a_2 + b_2/\lambda_0^2. \text{ Átrendezve } \lambda_0 = \sqrt{\frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}} = 500 \text{ nm. Ekkor } n_1 = n_2 = 1,5.$$

b) A λ_0 -nál nagyobb hullámhosszú vörös fényre n_1 és n_2 is kisebb, mint 1,5, míg a λ_0 -nál kisebb hullámhosszú kék fényre mindkét törésmutató nagyobb. Nézzük még meg, hogy az AC felületen hogyan változik a törésmutató. Tudjuk, hogy a λ_0 hullámhosszúságú fényre $n_2/n_1 = 1$. Ha a λ_0 helyett $\lambda_{\text{vörös}}$ hullámhosszú fényt veszünk, akkor $b_1 > b_2$ miatt n_1 jobban csökken, mint n_2 , ezért $n_2/n_1 > 1$. Hasonlóan látható, hogy kék fényre $n_2/n_1 < 1$. A fentiek alapján már megrajzolhatjuk a fénysugarak áthaladását a prizmán (6. ábra).



6. ábra

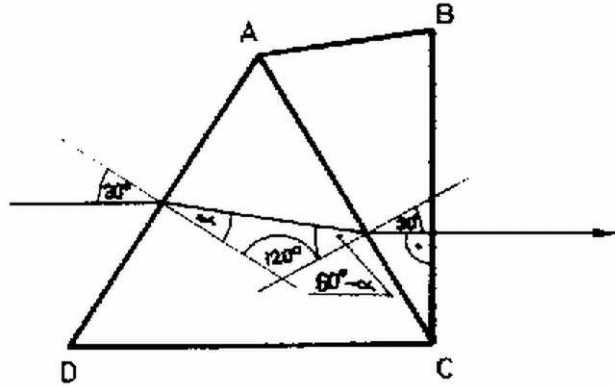
c) A λ_0 hullámhosszú fényre a prizmarendszer úgy viselkedik, mint egy 30° -os törőszögű $n = 1,5$ törésmutatójú anyagból készült prizma. Tudjuk, hogy egy prizmán áthaladó fénysugár akkor térül el legkevésbé, ha a prizmán szimmetrikusan halad át, azaz a 7. ábrán α -val jelölt szögek egyenlők.



7. ábra

Ekkor a törési törvény $\frac{\sin \alpha}{\sin 15^\circ} = 1,5$, innen $\alpha = 22^\circ 50'$.

A keresett eltérítési szög: $\delta = 2\alpha - 30^\circ = 15^\circ 40'$.



8. ábra

d) A 8. ábra alapján a következő összefüggéseket írhatjuk fel:

$$\frac{\sin 30^\circ}{\sin \alpha} = n, \quad \frac{\sin (60^\circ - \alpha)}{\sin 30^\circ} = \frac{n_2}{n_1}.$$

A két egyenletből α -t kiküszöbölve: $3n_1^2 = n_2^2 + n_2 + 1$.

Az n_1 re és n_2 -re adott összefüggéseket leírva és átrendezve:

$$(3a_1^2 - a_2^2 - a_2 - 1)\lambda^4 + (6a_1b_1 - b_2 - 2a_2b_2)\lambda^2 + 3b_1^2 - b_2^2 = 0.$$

Ez λ^2 -re másodfokú egyenlet, aminek megoldása $\lambda = 1,18\mu\text{m}$.

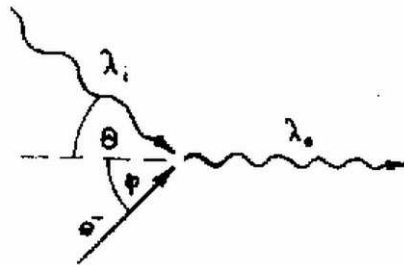
(7 pont)

4. Egy λ_i hullámhosszúságú foton egy mozgó szabad elektronnal ütközik. Az ütközés következtében az elektron megáll, és egy λ_0 hullámhosszúságú, az előbbi haladási irányához képest $\Theta = 60^\circ$ -os szöggel eltérült foton halad tovább. Ezután a foton egy nyugalomban levő szabad elektronnal ütközik és egy $\lambda_f = 1,25 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ hullámhosszúságú fotonként halad tovább, mozgásiránya a második ütközés során is $\Theta = 60^\circ$ -kal változik meg. Számítsuk ki az első elektron de Broglie hullámhosszát az ütközés előtt! (Planck állandó: $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$, elektrontömeg: $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, fénysebesség: $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.)

Megoldás. Az első ütközésre az energiamegmaradás:

$$(1) \quad h\nu_0 = h\nu_i + E_e,$$

ahol ν a foton frekvenciája, és E_e az elektron energiája. Az impulzusmegmaradást a kirepülő λ_0 hullámhosszúságú foton mozgásirányában és arra merőlegesen írjuk fel (9. ábra):



9. ábra

$$\frac{h}{\lambda_0} = \frac{h}{\lambda_i} \cos \Theta + P_e \cos \varphi,$$

$$0 = \frac{h}{\lambda_i} \sin \Theta - P_e \sin \varphi,$$

ahol P_e az elektron impulzusa.

Az utóbbi két egyenletből φ -t kiküszöbölve, és λ helyére c/ν -t írva

$$(2) \quad (h\nu_0)^2 + (h\nu_i)^2 - 2h^2\nu_0\nu_i \cos \Theta = P_e^2 c^2.$$

Felhasználva a

$$(3) \quad c^2 P_e^2 = E_e(E_e + 2m_e c^2)$$

relativisztikus összefüggést, az (1) és (2) egyenletekből:

$$(4) \quad \nu_0 = -\frac{v_i}{\frac{h\nu_i}{m_e c^2}(1 - \cos \Theta) - 1}.$$

Átalakítva:

$$(5) \quad \lambda_0 - \lambda_i = -\frac{h}{m_e c}(1 - \cos \Theta).$$

A második ütközésre teljesen hasonlóan végezhetjük a számításokat, eredményül a

$$(6) \quad \lambda_0 - \lambda_f = -\frac{h}{m_e c}(1 - \cos \Theta).$$

összefüggést kapjuk. Az (5) és (6) egyenleteket egymásból kivonva $\lambda_i = \lambda_f$ -et kapunk. A két ütközés tehát teljesen hasonló. (5) alapján $\lambda_0 = 1,238 \cdot 10^{-10}$ m.

Az elektron energiáját (1) alapján számíthatjuk ki: $E_e = hc \left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_i} \right) = 1,56 \cdot 10^{-17}$ J. A (3) összefüggés felhasználásával $P_e = 28,4 \cdot 10^{-48}$ kg m/s. A keresett elektronhullámhossz $\lambda_e = h/P_e = 1,24 \cdot 10^{-10}$ m. (7 pont)

A következő feladattal nem lehetett pontot szerezni a versenyben, helyes megoldásáért különdíjat adtak.

Magyarázzuk meg kvalitatívan, hogy az Olimpia emblémáján látható vízszintes tengelyű hengerre öntött folyadékugár miért nem hagyja el a hengert a szaggatott vonal irányában, miért folyik a folytonos vonallal jelölt görbe mentén! Ez a tény az úgynevezett Coanda-hatással van kapcsolatban, amelyet 1936-ban Henry Coanda román mérnök szabdalmaztatott. (Az Olimpia emblémáját ld. a szeptemberi számban!)

Kísérleti feladat

Rendelkezésre áll egy áramforrás (amely egy telepből és a ráragasztott ellenállásból áll), két feszültségmérő műszer (ezekkel áramerősség nem mérhető) és egy változtatható ellenállás.

a) *Határozzuk meg a lehető legkevesebb áramkör összeállításával az áramforrás elektromotoros erejét! Ehhez a méréshez csak a két voltmérő használható. (A változtatható ellenállás nem.)*

b) *Most csak az egyik voltmérő és a változtatható ellenállás használható. Az előző ponttól független méréssel határozzuk meg az áramforrás elektromotoros erejét, az áramforrás és a voltmérő belső ellenállását!*

Ebből a célból célszerű a mérési eredmények alapján két grafikont készíteni, amelyeknek elméletileg egyenest kell adniuk, és a keresett mennyiségeket ezek segítségével meghatározni.

c) *Adjuk meg a hibaforrásokat! Melyek azok, amelyek leginkább befolyásolják a végeredményt?*

Megoldás. a) Készítsünk el két kapcsolást! Először a két feszültségmérőt sorbakötve kapcsoljuk az áramforrásra. Ekkor a műszerek U_1 és U_2 feszültséget mutatnak. A másik kapcsolásban csak az egyik feszültségmérőt kötjük az áramforrásra, és ekkor U'_2 feszültséget mérünk. E -vel és r -rel jelölve az áramforrás elektromotoros erejét és belső ellenállását, valamint R_1 és R_2 -vel a két műszer belső ellenállását, a következőket írhatjuk fel:

$$\frac{U_1}{E} = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + r}, \quad \frac{U_2}{E} = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + r}, \quad \frac{U_2}{E} = \frac{R_2}{R_2 + r}.$$

A három egyenletet rendezve kapjuk a keresett összefüggést:

$$E = \frac{U_1 U'_2}{U'_2 - U_2}.$$

b) Ismét két kapcsolást készítsünk! Először a feszültségmérőt és a változtatható ellenállást sorosan kötve kapcsoljuk az áramforrásra. Ha R_f -fel, ill. R -rel jelöljük a feszültségmérő, ill. a változtatható ellenállás ellenállását, akkor az Ohm-törvény felhasználásával a következő kifejezést kapjuk:

$$\frac{1}{U} = \frac{R_f + r + R}{E R_f}.$$

Ha a mért U és R értékek alapján az $1/U$ -t ábrázoljuk az R függvényében, akkor olyan pontokat kell kapnunk, amelyek egy egyenesre illeszkednek. Az egyenes $p_1 = \frac{1}{ER_f}$ meredekségét és az ordinátával való $b = \frac{R_f + r}{ER_f}$ metszéspontját leolvashatjuk a grafikonról.

A második kapcsolásban a voltmérőt és a változtatható ellenállást párhuzamosan kötve kapcsoljuk az áramforrásra. Ekkor

$$\frac{1}{U} = \frac{1 + (1/R_f + 1/R)r}{E}.$$

Most tehát ha az $1/R$ függvényében ábrázoljuk az $1/U$ -t olyan pontokat kell kapnunk, amelyek a $p_2 = r/E$ meredekségű egyenesre illeszkednek. A p_1 , p_2 és b -re felírt összefüggésből a $p_1 p_2 E^2 - bE + 1 = 0$ egyenletet kapjuk, ahonnan

$$E = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4p_1 p_2}}{2p_1 p_2}.$$

p_1 , p_2 és b meghatározása után tehát E -t kiszámíthatjuk. A keresett másik két mennyiséget az $R_f = 1/Ep_1$ és $r = Ep_2$ összefüggések alapján kapjuk.

c) A mérés legjelentősebb hibáját a feszültségmérő pontatlansága okozza. Ez a hiba a képletekbe való behelyettesítéskor megsokszorozódik. (20 pont)