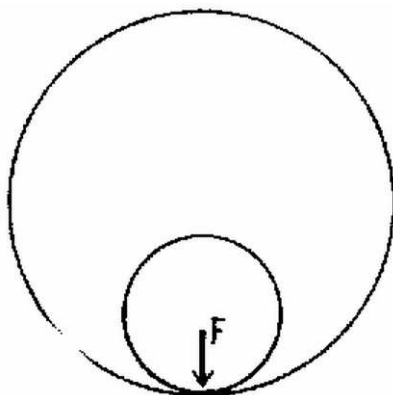


Az 1983. évi középiskolai tanulmányi verseny feladatai

Az I. forduló feladatai

1. Egy $m = 8$ kg tömegű, belül üres, merev falú gömbbe egy másik, ugyancsak $m = 8$ kg tömegű tömör, kis gömböt helyezünk (1. ábra). A gömböket levegőben, nagy magasságból leejtjük. A közegellenállási erő arányos a sebesség négyzetével: $F = kv^2$. Az arányossági szorzó m/s és newton esetében $k = 0,1$. Ábrázoljuk a kis gömb által a nagy gömbre kifejtett erőt a sebesség függvényében! $g = 10$ m/s².

(Légrádi Imre)

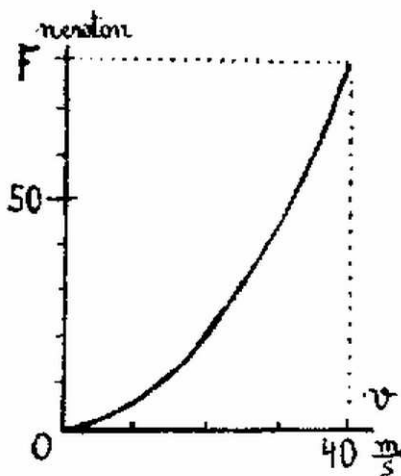


1. ábra

Megoldás. Az összesen 16 kg-ot gyorsító erő $16g - 0,1v^2$, a gyorsítandó tömeg 16 kg, tehát a közös gyorsulás $a = g - 0,00625v^2$. Az az erő, amellyel a 8 kg tömegű kis golyó a nagyot nyomja (hasonlóan a fonálerőhöz):

$$8g - 8(g - 0,00625v^2) = 0,05v^2.$$

A görbe parabola.

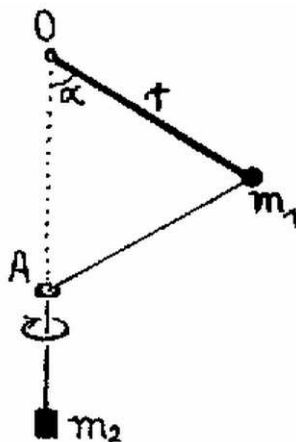


Nulla sebességnél a golyók még éppen együtt esnek, a nyomóerő nulla. Határesetben akkor egyenletes a golyók mozgása, amikor $160 = 0,1v^2$, vagyis $v = 40$ m/s. Ekkor a nyomóerő a kis golyó teljes súlya, vagyis 80 newton.

2. Egy $r = 0,5$ m hosszú fonálra erősített $m_1 = 4$ kg tömegű test vízszintes síkban körpályán kering (2. ábra). Az inga fonala a függőlegessel $\alpha = 60^\circ$ -os szöget zár be. Az m_1 tömegű testhez erősített második fonalat az A-ban elhelyezett gyűrűn vetjük át; ezen a fonálon $m_2 = 6$ kg tömegű test lóg. $OA = r = 0,5$ m, $g = 10$ m/s.

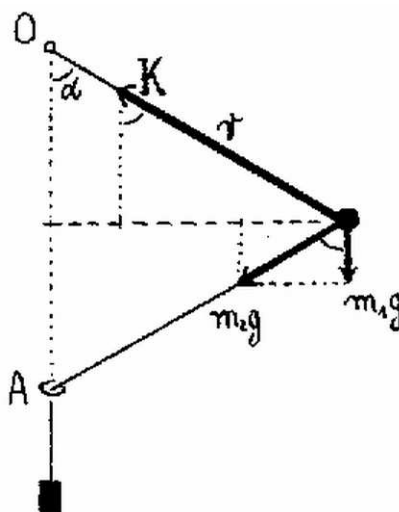
- Mekkora a szögsebesség?
- Vizsgáljuk meg ezt a helyzetet a stabilitás szempontjából!

(Vermes Miklós)



2. ábra

Megoldás. A felső kötélzárban K erő hat (3. ábra).



3. ábra

Az m_1 tömegű testre ható erők függőleges összetevőinek egyensúlyfeltétele:

$$K \cos \alpha = m_1 g + m_2 g \cos \alpha.$$

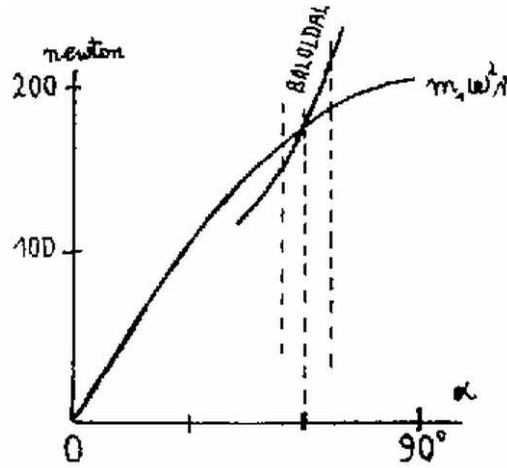
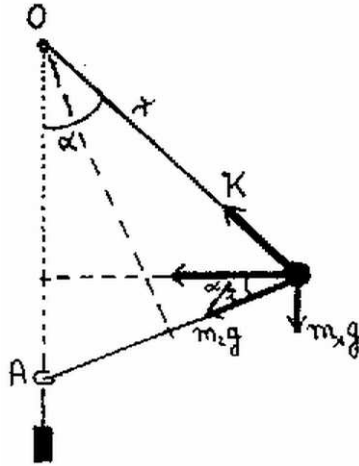
A körmozgáshoz szükséges erőt a vízszintes összetevők összege szolgáltatja:

$$K \sin \alpha + m_2 g \sin \alpha = m_1 \omega^2 r \sin \alpha.$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$K = m_2 g + \frac{m_1 g}{\cos \alpha} = 140 \text{ N}, \quad \omega = \sqrt{\frac{2m_2 g}{m_1 r} + \frac{g}{r \cos \alpha}} = 10 \text{ s}^{-1}.$$

A stabilitás megvizsgálása mozgásban levő szerkezet esetében nem olyan egyértelmű, mint a statikában. Meg kell állapodnunk abban, hogy a vizsgálatot milyen fajta zavar esetében végezzük el. Ha a zavar a lelógó fonál meghúzásából ered, akkor a változás közben állandó marad az impulzusnyomaték és erre a feltételre ekkor tekintettel kell lennünk. Nézzük a legegyszerűbb esetet, amikor a szerkezetet egy gépezet állandóan $\omega = 10 \text{ s}^{-1}$ szögsebességgel tartja forgásban (ekkor az impulzusnyomaték nem marad változatlan). Megvizsgáljuk, hogyan alakul az erők egyensúlya, ha valamilyen külső ok megváltoztatja az α szöget (4. ábra).



4. ábra

Nem speciálisan 60° -os, hanem tetszőleges α szögre végezzük el a számítást. A körmozgáshoz szükséges erő így alakul:

$$K \sin \alpha + m_2 g \cos \frac{\alpha}{2} = m_1 \omega^2 r \sin \alpha.$$

A K kötelerőnek akkorának kell lennie, hogy biztosítva legyen a függőleges erőösszetevők egyensúlya is:

$$K \cos \alpha = m_1 g + m_2 g \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Az ebből adódó K -t a körmozgásnál felhasználva következik az egyensúly feltétele:

$$m_1 g \tan \alpha + 2 m_2 g \tan \alpha \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = m_1 \omega^2 r \sin \alpha.$$

A bal oldal menetét feltüntető görbe a jobb oldali szinuszgörbét $\alpha = 60^\circ$ -nál metszi, amint azt tudjuk. Az ábra görbéinek menetéből látszik, hogy az egyensúlyi helyzetet elrontva az erők törekvése az eredeti állapot visszaállítása. Ténylegesen elvégezve a kísérletet az m_1 tömegű test kúpingaszerűen keringene.

3. Egy 8 dm^2 alapterületű, 8 dm magas henger alakú zárt edényben egy rugó tart a vízben lebegve egy téglatestet (5. ábra a). A téglatest tömege 2 kg , alapterülete 4 dm^2 , magassága 1 dm . A rugó eredeti hossza 3 dm , rugóállandója 40 N/dm . A víz szintje az edény fele magasságában van. $g = 10 \text{ m/s}^2$.

a) Milyen hosszú most a rugó?

b) Milyen hosszú lesz a rugó, ha az edényt megfordítjuk, vagyis A lapja helyett B lapjára állítjuk?

(Vermes Milkós)

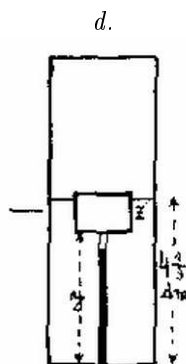
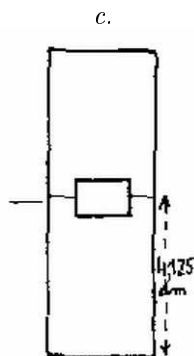
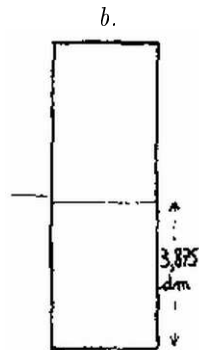
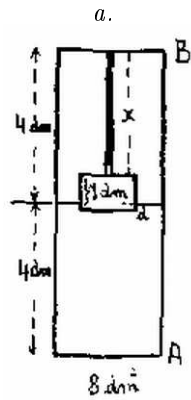
Megoldás. Az 5. ábra a esetében a rugó hossza x , megnyúlása $x-3$, felhúzóereje $40(x-3)$. A téglatest bemerülése $d = x + 1 - 4 = x - 3$, a hidrosztatikai felhajtóerő $4(x-3)\rho g = 40(x-3)$. A téglatest súlya 20 newton . Az erők egyensúlya folytán:

$$20 = 40(x-3) + 40(x-3).$$

Innen a rugó mostani hossza $x = 3,25 \text{ dm}$ és a bemerülés $d = 0,25 \text{ dm}$.

Meg kell állapítanunk a víz mennyiségét:

$$8 \cdot 3,75 + 4 \cdot 0,25 = 31 \text{ dm}^3.$$



5. ábra

Téglatest nélkül (5. ábra *b*) a víz 3,875 dm magasan állna az edényben. Ha most ráhelyezzük a $0,5 \text{ kg/dm}^3$ sűrűségű téglatestet, az félig bemerülve úszik és a vízmagasság 4,125 dm. (*c.*)

Ha most a téglatestet a fenékhez rögzített rugóhoz erősítjük, akkor a rugó lefelé húzza. Ebben az esetben a rugó hossza y és a bemerülés z (*d.*). Az erők egyensúlya:

$$20 + 40(y - 3) = 40z.$$

A második egyenletet a vízmennyiség állandósága adja:

$$31 = 8y + 4z.$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$y = 3\frac{5}{12}$ dm, $z = \frac{11}{12}$ dm, azaz a rugó hossza ekkor $3\frac{5}{12}$ dm.

4. Egy tartály fenekén $A = 10 \text{ cm}^2$ nagyságú lyuk van (6. ábra). A lyukhoz egy rugó egy szelepet szorít hozzá, amely csak $F = 6,5 \text{ N}$ -nál nagyobb erő esetében nyílik ki. A tartályba $0,5 \text{ m}$ magasan vizet öntünk, majd a tartályt függőlegesen rezgő mozgásba hozzuk. A rezgés amplitúdója $r = 0,05 \text{ m}$, körfrekvenciája $\omega = 12 \text{ s}^{-1}$. Milyen magas vízoszlop marad végül is a tartályban? $g = 10 \text{ m/s}^2$.

(Nagy László)



6. ábra

Megoldás. A vízoszlopnak akkor maximális a gyorsulása, amikor a legalsó helyzetben van:

$$a_m = r\omega^2 = 7,2 \text{ m/s}^2.$$

Legalul a szelepet nyomja az x magasságú, ρ sűrűségű megmaradt vízoszlop súlya és a rezgésből származó erő:

$$Ax\rho g + r\omega^2 Ax\rho = Ax\rho(g + r\omega^2).$$

Ezzel egyenlő a szelepet nyitó erő:

$$F = Ax\rho(g + r\omega^2).$$

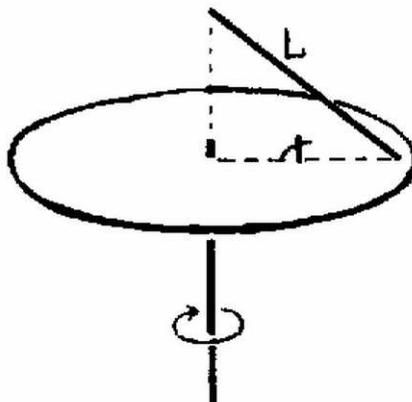
Innen a megmaradó vízoszlop magassága:

$$x = \frac{F}{A\rho(g + r\omega^2)} = 0,38 \text{ m}.$$

A II. forduló feladatai

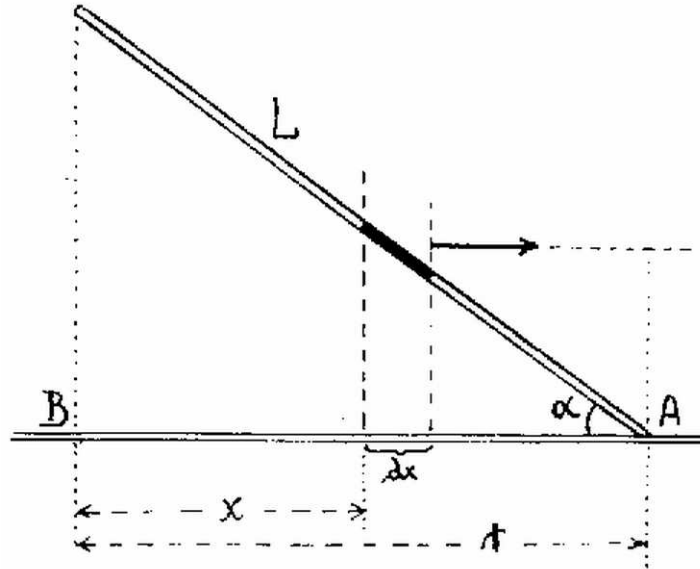
1. Egy korong állandó szögsebességgel forog függőleges tengelye körül (7. ábra). A korongra egy $L = 1 \text{ m}$ hosszú lécezt támasztottunk és ez a koronggal együtt forog. A lécs alsó vége $r = 0,8 \text{ m}$ -re van a tengelytől, felső vége épp a tengely felett van. Mennyi a korong szögsebessége? $g = 10 \text{ m/s}^2$.

(Nagy László)



7. ábra

Megoldás. A pálca egységnyi hosszúságú darabjának tömege σ , a dx vetületű, x távolságban levő darabjának tömege $\sigma dx / \cos \alpha$. E rész körmozgásához $\rho dx \cdot \omega^2 \cdot x / \cos \alpha$ erő szükséges (8. ábra).



8. ábra

Számítsuk ki a forgatónyomatékok egyenlőségét a pálca A alátámasztási pontjára vonatkozóan! A dx vetületű darab forgatónyomatéka:

$$\frac{\sigma dx}{\cos \alpha} \omega^2 x(r-x) \operatorname{tg} \alpha.$$

A teljes forgatónyomaték:

$$\int_0^r \frac{\sigma \omega^2 \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha} (rx - x^2) dx = \frac{\sigma \omega^2 \operatorname{tg} \alpha r^3}{6 \cos \alpha}.$$

\epsfbox{1983-84-2.eps} 8. ábra

Az egész pálca tömege $m = \sigma r / \cos \alpha$, ezért a számított forgatónyomaték:

$$\frac{m \omega^2 \operatorname{tg} \alpha r^2}{6}.$$

A súly lebillentő forgatónyomatéka $mgr/2$. Egyenlővé téve:

$$\frac{m \omega^2 r^2 \operatorname{tg} \alpha}{6} = \frac{mgr}{2}.$$

A keresett szögsebesség:

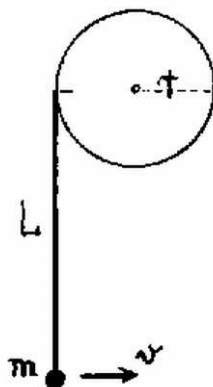
$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{r \operatorname{tg} \alpha}} = \sqrt{50} = 7,07 \text{ s}^{-1}.$$

A pálca alsó vége a korongot függőlegesen mg erővel nyomja. A vízszintes erő $mr\omega^2/2$, ami az elemi-rúddarabok centripetális erő szükségletének az összege. Ezek eredőjének, a támaszerőnek a vízszintessel alkotott β szöge: $\operatorname{tg} \beta = 2g/r\omega^2$, $\beta = 26,57^\circ$. Az α szög $36,87^\circ$. A támaszerő iránya nem esik egybe a rúd irányával, nem megy át a rúd súlypontján.

2. Vízszintes asztallapon $r = 0,2$ m sugarú hengert rögzítettünk. Kerületéhez $L = 0,8$ m hosszú fonalat erősítettünk az érintő irányában (9. ábra). E fonál végén, az asztalon fekvő $m = 0,6$ kg tömegű test van, amelyet a fonálra merőlegesen $v = 0,4$ m/s sebességgel elindítunk. A súrlódás elhanyagolható.

- Mennyi idő múlva ér az m tömegű test a hengerhez?
- Hogyan függ a fonalat feszítő erő az időtől?

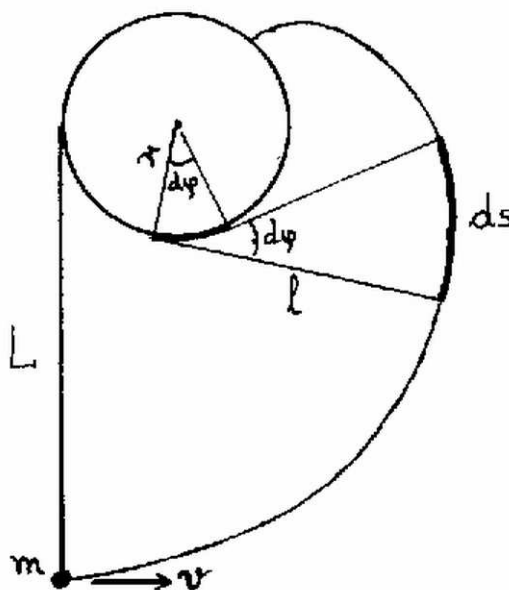
(Dr. Bodó Zoltán)



9. ábra

Megoldás. A sebesség mindig merőleges a fonálra, a fonálerő nem végez munkát, nem képes változtatni a sebességet, a test mindvégig $v = 0,4 \text{ m/s}$ sebességgel mozog. Ki kell számítani a pálya (kör-evolvens) hosszát.

A fonál érintési pontjaihoz rajzolt rádiuszok $d\varphi$ szöget zárnak be (10. ábra). A fonál $r \cdot d\varphi$ darabbal lett rövidebb: $dl = -r \cdot d\varphi$.



10. ábra

A pálya hosszának kis eleme: $ds = l \cdot d\varphi$. Kiküszöbölve $d\varphi$ -t:

$$ds = -\frac{l}{r} \cdot dl.$$

Az egész út: $s = -\int_L^0 \frac{l}{r} dl = \frac{L^2}{2r} = 1,6 \text{ m}$. A mozgás időtartama:

$$T = \frac{L^2}{2rv} = 4 \text{ s}.$$

A pillanatnyi pályasugár l , a forgási középpont felé mutató erő mv^2/l . Meg kell állapítani hogyan függ l az időtől. Az út kiszámításánál l -től nem 0-ig, hanem egy tetszőleges l -ig integrálunk; ez az út $s = vt$:

$$s = -\int_L^l \frac{l}{r} dl = \frac{1}{2r}(L^2 - l^2) = vt.$$

Ebből

$$l = \sqrt{L^2 - 2rvt}.$$

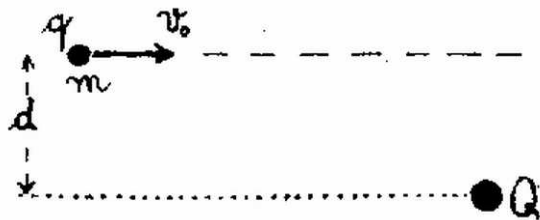
Az erő, mint az idő függvénye:

$$F = \frac{mv^2}{\sqrt{L^2 - 2rvt}} = \frac{0,24}{\sqrt{4-t}}.$$

3. Egy rögzített $Q = +1Q^{-15}$ C elektromos töltés felé nagyon messziről $v_0 = 200$ m/s sebességgel elindítunk egy $m = 0,01$ g tömegű, $q = +10^{-7}$ C töltésű apró golyócskát egy olyan egyenes mentén, amely $d = 0,1$ m távolságban van a Q töltéstől (11. ábra).

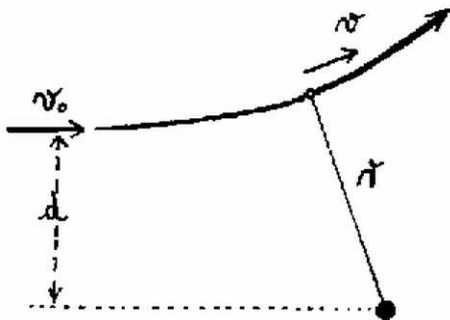
a) Mekkora lesz a két töltés közötti legkisebb távolság?

b) Mekkora legyen a d távolság, hogy a q töltésű test végső sebessége az eredeti v_0 -ra merőleges legyen?



11. ábra

Megoldás. A négyzetes erőtvény következtében a pálya hiperbola (12. ábra).



12. ábra

Az elektromos taszítóerő ellen végzett munka egyenlő a mozgási energia csökkenésével:

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = \frac{kqQ}{r},$$

k a Coulomb-törvény arányossági szorzója, $k = 9 \cdot 10^9$.

A mozgó töltésre érvényes a területi sebesség állandósága. A területi sebesség induláskor dv_0 , a legközelebbi helyzetben rv ;

$$dv_0 = rv.$$

v kiküszöbölése után, rendezve:

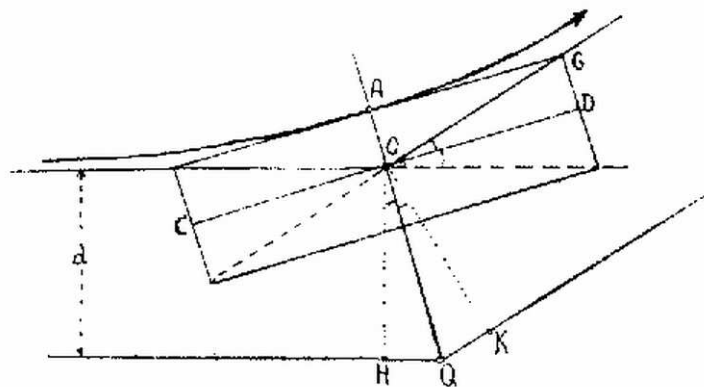
$$\frac{mv_0^2}{2} \cdot r^2 - kqQ \cdot r - \frac{mv_0^2 d^2}{2} = 0.$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$r = \frac{kqQ}{mv_0^2} + \sqrt{\left(\frac{kqQ}{mv_0^2}\right)^2 + d^2} = 0,125 \text{ m.}$$

Továbbá $v = \frac{d}{r} \cdot v_0 = 160$ m/s.

A hiperbola legközelebbi, A pontja a hiperbola csúcspontja (13. ábra). Az AQ egyenesen fekszik a hiperbola O centruma, ahol a kezdeti és végső sebességek irányai, az aszimptoták metszik egymást. AO a hiperbola fél valós tengelye, OQ pedig a fókusz távolsága. OHQ és OGA háromszögek egybevágók.



13. ábra

Így $OD = OH = d$ a hiperbola fél képzetes tengelye. A fókusz távolság $OQ = \sqrt{AO^2 + d^2}$ a legrövidebb r távolságunk pedig $AO + \sqrt{AO^2 + d^2}$. Ebből következik, hogy bármekkora v_0 indítási sebesség mellett a hiperbola fél képzetes tengelye d , fél valós tengelye pedig

$$AO = \frac{kqQ}{mv_0^2}.$$

Az aszimptoták merőlegességének feltétele, hogy a valós és képzetes tengelyek egyenlők legyenek:

$$\frac{kqQ}{mv_0^2} = d.$$

Ebből a mi számadatainkkal $d = 0,0225$ m, $r = 0,05432$ m és $v = 82,842$ m/s következik.

A III., kísérleti forduló

A versenyzők megismerkedtek a Fresnel-féle zónalemez elméletével és mérőkísérleteket végeztek vele.