Szabályos toroidok

Mint ismeretes, a szabályos poliéderek minden csúcsába ugyanannyi él fut be, és minden lapjának ugyanannyi éle van. Egy poliéder *topológiailag szabályos*, ha a fenti kikötéseket nem szigorítjuk további (pl. az élek és lapok szögeire vonatkozó) kikötéssel. Ebben a cikkben ilyen poliéderekkel fogunk megismerkedni, előbb azonban áttekintünk néhány, a poliéderekkel kapcsolatos fogalmat és egyszerűbb összefüggést.

Egy poliéder *közönséges*, ha a poliédertest bármely két pontja összeköthető olyan töröttvonallal, amely nem metszi a poliéder felületét, továbbá minden csúcsánál a csúcsot tartalmazó lapok egy ciklust alkotnak úgy, hogy a ciklus szomszédos tagjai a szomszédos – közös éllel rendelkező – lapok. A közönséges poliéder minden éle pontosan két lap határán van.

Egy poliéder *egyszerű*, ha közönséges, topológiailag gömbszerű, azaz folytonos deformálással gömbbé alakítható, lapjai pedig egyszerű sokszögek. [1] Pl. a konvex poliéderek egyszerűek, de nem kell minden egyszerű poliédernek feltétlenül konvexnek lennie. Az egyszerű poliéderek körében érvényes az Euler–féle

$$L + C - E = 2 \tag{1}$$

összefüggés, ahol L a lapok, C a csúcsok, E az élek számát jelöli.

Az összefüggés alkalmazásával könnyen belátható, hogy csak öt „topológiailag” szabályos, egyszerű poliéder létezik, és ezek mindegyike realizálható úgy, hogy lapjai és testszögletei szabályosak és egybevágók legyenek. Így jutunk az ismert öt szabályos egyszerű poliéderhez. [2]

Nevezzük *toroid*nak a topológiailag tórusszerű, azaz folytonos deformálással tórusszá (körgyűrű–felületté) alakítható, egyszerű sokszögekkel határolt közönséges poliédereket. Az így értelmezett toroidokra az Euler–féle összefüggés így módosul:

$$L + C - E = O. \tag{2}$$

(Általánosabb értelmezését is adhattuk volna a toroidoknak, toroidnak nevezve minden olyan közönséges, de nem egyszerű poliédert, amelynek a felülete összefüggő. Erre az általánosításra most nem lesz szükségünk.)

Egy – a szűkebb értelemben vett – toroidot nevezzünk *szabályos*nak, ha minden csúcsába ugyanannyi él fut be, és minden lapjának ugyanannyi éle van.

A toroidokat vizsgálva nem reménykedhetünk abban, hogy a lapok, ill. testszögletek mind szabályosak és egybevágók lesznek, így a „szabályos” jelző itt nyilvánvalóan topológiai tulajdonság.

Ismerkedjünk meg a szabályos toroidok néhány érdekes képviselőjével!

1. Legyen egy szabályos toroid minden lapjának a éle, és minden csúcsába fusson be b él. Az $L \cdot a$ és $C \cdot b$ szorzatok egyaránt az élek számának a kétszeresét adják, mivel minden él pontosan két lapra és két csúcsra illeszkedik. Ezek, valamint a toroidokra érvényes Euler–féle (2) összefüggés alapján kapjuk, hogy

$$\frac{2E}{a} + \frac{2E}{b} - E = 0,$$

ebből pedig $E > -O$-t kihasználva az

$$a = 2 + \frac{4}{b-2}$$

diofantoszi egyenlethez jutunk. Az egyenletet csak három olyan – egész számokból álló – $(a,\, b)$ számpár elégíti ki, amely eleget tesz az $a \geq 3$ és $b \geq 3$ feltételnek. Eszerint a szabályos toroidok – az egy lapra, ill. csúcsra illeszkedő élek száma szerint osztályozva – három osztályba sorolhatók:

S_1 osztály: $a = 3$, $b = 6$;
S_2 osztály: $a = 4$, $b = 4$;
S_3 osztály: $a = 6$, $b = 3$.

Mint ismeretes, a síkot egybevágó szabályos sokszögekkel hézagmentesen csak három módon lehet lefedni: a szabályos háromszögekkel, négyzetekkel és a szabályos hatszögekkel. (Minden élnek pontosan két lap határán kell lennie. Ezt a kikötést elmulasztva a háromszögekkel és a négyzetekkel való lefedés nem egyértelmű.)

A három parkettázás topológiailag éppen az előző három esetnek felel meg. Ha egy ilyen kiparkettázott síkból kiragadunk egy „elég nagy” téglalapot, és összeragasztjuk a szemben levő éleit, akkor egy olyan tóruszra rajzolt térképhez jutunk, amely topológiailag szabályos. (Valóban: egy téglalap két szemben levő élét összeragasztva egy hengerpalástot kapunk, ebből pedig a másik két – most már kör alakú – él összeragasztásával tóruszt.) Ha az így kapott tóruszra rajzolt szabályos térképnek elég sok tartománya van, akkor a síklapokkal való realizálásnak nincs elvi akadálya. Mondhatjuk tehát, hogy mindhárom osztályba végtelen sok szabályos toroid tartozik. Érdekes kérdés azonban, hogy legkevesebb hány lapra, ill. csúcsra van szükség az egyes osztályokba tartozó szabályos toroidok előállításához, esetleg szigorítva a kikötést azzal, hogy a toroid lapjai – vagy testszögletei – az egybevágóság szempontjából minél kevesebb osztályt alkossanak.

[1] Lásd Hajós György: Bevezetés a geometriába, 26–28. old.
[2] Lásd i. m. 202–207. oldal.

2. Az S_1 osztályba tartozó minimális lap- (és csúcs-) számú szabályos toroid a KÖMAL 1982. novemberi számában bemutatott, átló nélküli – ún. *Császár–féle* – poliéder. (KÖMAL 1982. 65. kötet, 3–4. szám, 154–155. oldal.) Valóban, egy S_1 osztálybeli szabályos toroidnak minden csúcsába hat él fut be, így legalább hét csúcsa van. Ez pedig éppen egy hét csúcsú toroid. (Belátható, hogy hétnél kevesebb csúcsú toroid egyáltalán nem létezhet.)

Az említett cikkben közölt adatok alapján épített toroid (nevezzük ezt C_1-nek) – mint a szerző is említi – eléggé „zsúfoltnak” tűnik. Van olyan lapszöge is, amely több, mint 355°-os. Egy „szellősebb” változat kereséséhez olyan számítógépi programot készítettünk, amely a hét csúcs derékszögű koordinátáiból kiindulva először ellenőrzi, hogy a hét pont által meghatározott poliéder nem önátmetsző-e, majd kiszámítja a poliéder éleinek hosszát, élszögeit és lapszögeit. Az 1. táblázatban a poliéder három változatának az adatait közöljük. A C_1 poliéder adatai alig különböznek az eredeti – Császár Ákos által közölt – adatoktól. [3]

A táblázatban – a könnyebb áttekinthetőség érdekében – számokkal jelöltük a csúcsokat. A poliédert alkotó háromszög–lapokat így számhármasok jelzik. A poliéder egyértelmű megadásához nem elég megadnunk a hét csúcs koordinátáit, azt is tudnunk kell, hogy a hét pont által meghatározott $\binom{7}{3} = 35$ háromszög közül melyik az a 14, amely a poliéder felületét alkotja.

Megfigyelhetjük, hogy mindhárom változatban az 1. és 6., 2. és 5., valamint a 3. és 4. csúcs egymásnak a koordináta–rendszer z tengelyére vonatkozó tükörképei, így a táblázatban egymás alá írt lappárok egybevágóak. Ugyancsak egybevágók az előbbi csúcspárokhoz tartozó testszögletek is. Így az egybevágóság szempontjából mindhárom változat lapjai hét, testszögletei négy osztályba sorolhatók.

Az 1. táblázat adatait vizsgálva kitűnik, hogy C_1-nek és C_2-nek ugyanott vannak konkáv lapszögei. A csúcsok folytonos mozgatásával a két változat átvihető egymásba úgy, hogy eközben soha ne legyen önátmetsző a poliéder felülete. A C_3 változathoz a csúcsok alapos átrendezésével jutottunk, így ez csak topológiai tulajdonságaiban egyezik meg az előzőkkel.

1. táblázat

	C_1			C_2			C_3		
csúcs	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z
1.	3	-3	0	$4\sqrt{15}$	0	0	-3	4	$13\sqrt{2}/2$
2.	3	3	2	0	8	4	0	12	0
3.	1	2	4	-1	2	11	12	0	$12\sqrt{2}$
4.	-1	-2	4	1	-2	11	-12	0	$12\sqrt{2}$
5.	-3	-3	2	0	-8	4	0	-12	0
6.	-3	3	0	$-4\sqrt{15}$	0	0	3	-4	$13\sqrt{2}/2$
7.	0	0	14	0	0	20	0	0	$26\sqrt{2}/3$

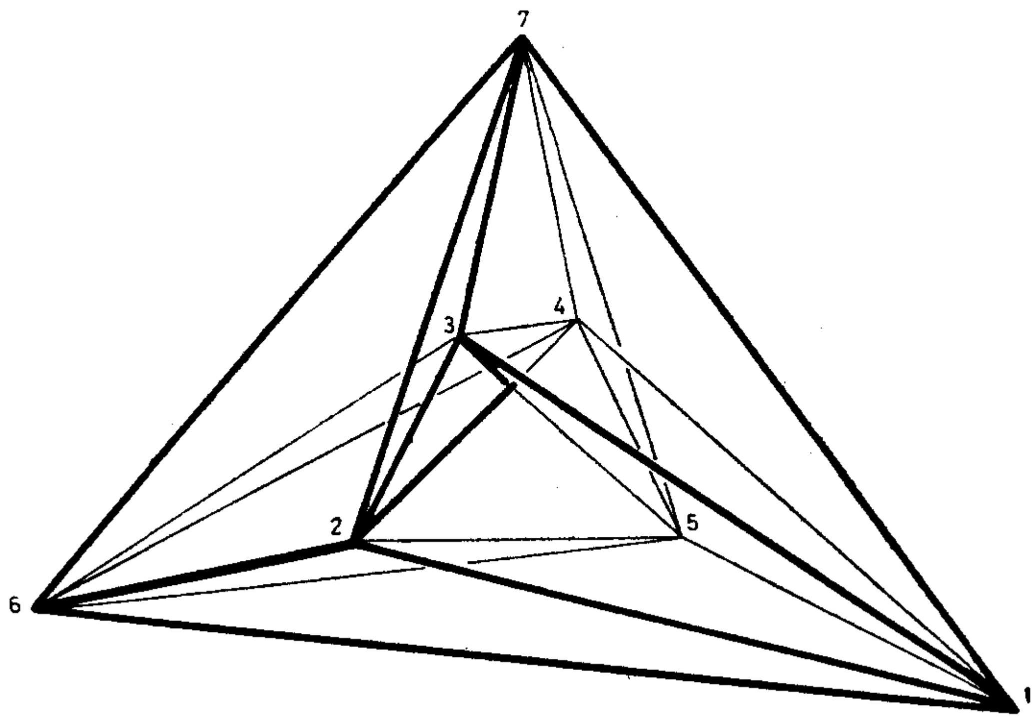
Élek	Élhossz	Lapszög	Élhossz	Lapszög	Élhossz	Lapszög
(1–6)	8,49	129°31′	30,98	126°52′	10	76° 8′
(2–5)	8,49	321° 3′	16	343°44′	24	70°32′
(3–4)	4,47	269°39′	4,47	256°53′	24	54°26′
(2–4)=(5–3)	6,71	69° 2′	12,25	69° 8′	24	51° 3′
(2–3)=(5–4)	3	218°40′	9,27	208°37′	24	52°43′
(3–7)=(4–7)	10,25	268°23′	9,27	279°25′	12,89	340° 8′
(2–7)=(5–7)	12,73	14°20′	17,89	35°54′	17,15	74°25′
(1–5)=(6–2)	6,32	93°53′	17,89	90°	18,69	339°19′
(1–2)=(6–5)	6,32	58°34′	17,89	67° 6′	12,55	156°51′
(1–4)=(6–3)	5,74	355°21′	18,3	343°23′	12,55	204°28′
(1–3)=(6–4)	6,71	51°27′	19,92	57° 6′	17,36	41°40′
(1–7)=(6–7)	14,63	81°18′	25,3	56°50′	5,86	243°30′

A poliéder lapjai:

(1-6-2)	(1-4-2)	(2-4-5)	(1-3-4)	(1-5-7)	(5-4-7)	(4-6-7)
(6-1-5)	(6-3-5)	(5-3-2)	(6-4-3)	(6-2-7)	(2-3-7)	(3-1-7)

A C_2 változat (1. ábra) valóban némiképp szellősebb C_1-nél, lapjai között több speciális akad. Pl. C_1-nek a legkisebb élszöge a $2-7-3$ szög alig több 8°-nál. C_2-ben ezt az élszögek szempontjából kritikus (2 3 7) háromszöget sikerült egyenlő szárúvá alakítani, amelynek az alapon fekvő szögei több, mint 15°-osak. C_2-ben az (1 6 2) egyenlő szárú háromszög csúcsszöge 120°, az (1 5 7) háromszög pedig egyenlő szárú, derékszögű.

[3] Császár: A polyhedron without diagonals, Acta Sci Math. Universitatis Szegediensis 13. (]949–50., 140–142.). A C_2 változat ebből a csúcsok koordinátáinak „finom” változtatásával alakítható ki, a C_3 változat ezektől lényegesen különbözik.



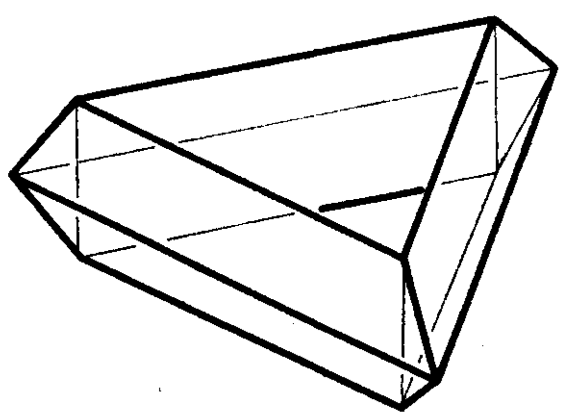
1. ábra

A C_3 toroid adatait úgy választottuk, hogy az 1, 6, 3, 4 csúcsok tetraédert alkossanak. Itt a konstrukció szempontjából az (1 2 4) háromszög „kritikus”. A (2 5) csúcspár alkalmas megválasztásával elértük, hogy ez a háromszög egyenlő szárú legyen, és az alapon fekvő szögei több, mint 17°-osak.

Felvethető a kérdés, hogy a koordináták változtatásával vagy átrendezésével kaphatunk-e ezeknél lényegesen „ szellősebb”, átló nélküli toroidot.

3. A szabályos toroidok S_2 osztályába azok a tórusszerű közönséges poliéderek tartoznak, melyeknek minden csúcsába négy él fut be, és lapjaik négyszögek. Legkönnyebb ilyen szabályos toroidot előállítani.

Vegyünk egy (pl. szabályos) p oldalú sokszöget, forgassuk el egy, a síkjában fekvő, de a sokszöget nem metsző t egyenes körül $\frac{k}{q}\cdot 2\pi$-vel, ahol $q \geq 3$ egész, és $k = 1, 2, \ldots, q-1$. Az így kapott $p \cdot q$ darab trapézból (ill. téglalapból) álló toroid szabályos, és az S_2 osztályba tartozik. Pl. $p = q = 3$ esetén a 2. ábrán látható toroidot kapjuk, amely az S_2 osztály minimális lapszámú tagja.

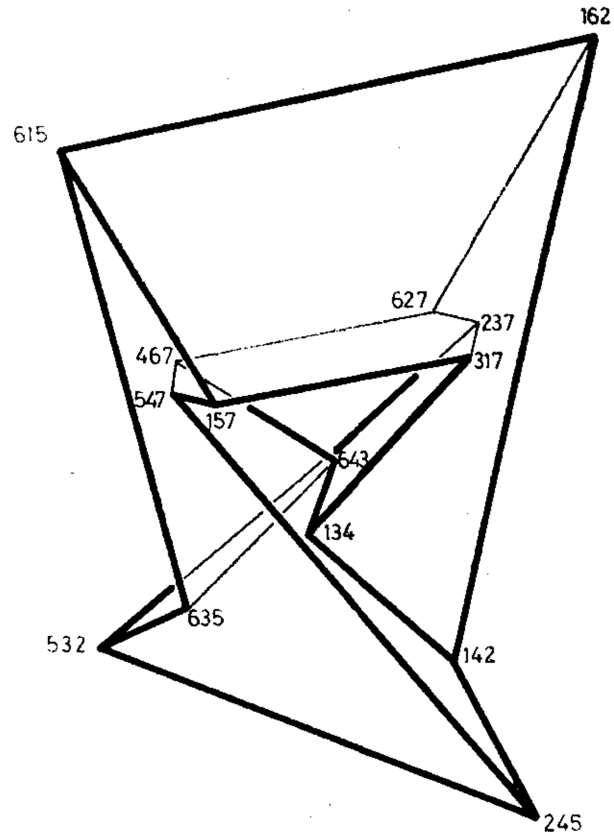


2. ábra

Ugyanis minden S_2-beli toroidnak legalább 9 csúcsa van. (Minden csúcsra négy lap illeszkedik, ezekre pedig összesen kilenc csúcs, amelyek közül bármely kettőnek különböznie kell, mert különben ellentmondásba kerülnénk azzal, hogy az S_2 osztályt közönséges poliéderek alkotják.)

Az előbbi eljárással $p = 3$, $q = 4$ (vagy $p = 4$ és $q = 3$) esetben 12-lapú (és csúcsú) S_2-beli szabályos toroidot kapunk. Nem tudjuk azonban, hogy létezik-e 10 vagy 11 lapú (és csúcsú) S_2 osztályba tartozó szabályos toroid.

4. Mint láttuk, a Császár–poliéder legfontosabb tulajdonsága, hogy *bármely két csúcsát él köti össze*. Ezzel a poliéderrel igen szoros, ún. *duális* kapcsolatban van az S_3 osztály minimális lapszámú poliédere, melynek legfőbb jellemzője, hogy *bármely két lapjának van közös éle* (3. ábra). (Duális kapcsolat van pl. az oktaéder és a kocka, vagy a dodekaéder és az ikozaéder között.)



3. ábra

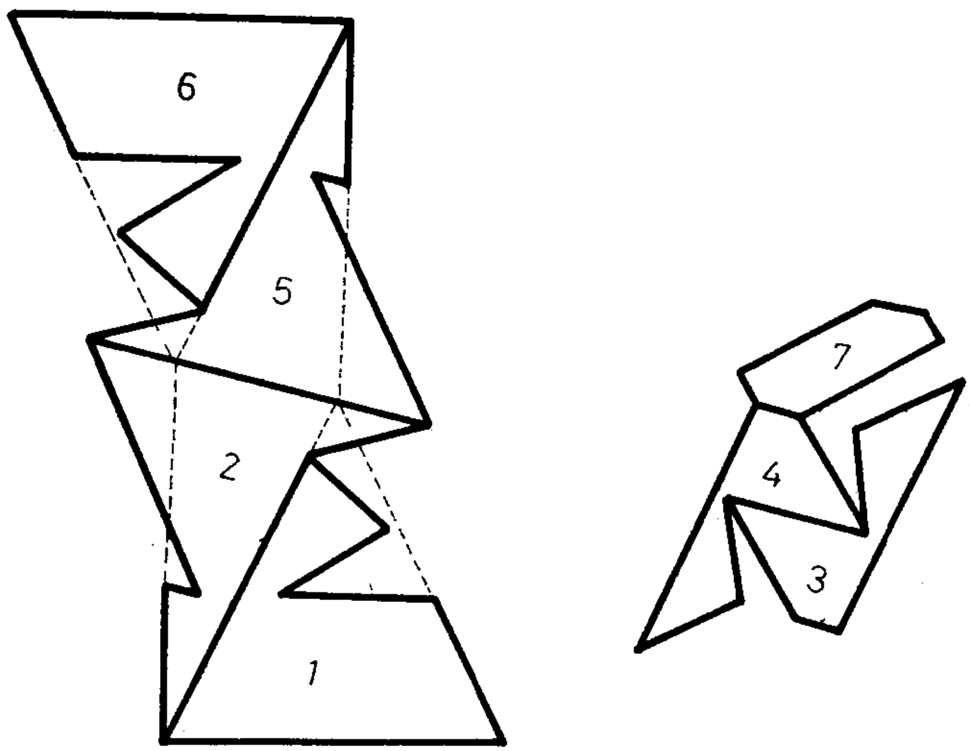
A duális kapcsolat nemcsak azt jelenti, hogy a lapok, csúcsok és az élek száma rendre megegyezik a Császár–poliéder csúcsainak, lapjainak és éleinek a számával, hanem azt is, hogy a lapok síkjait alkalmasan megszámozva ugyanazokkal a számhármasokkal adhatjuk meg a poliéder csúcsait, mint amelyekkel a duálisának a lapjait adtuk meg (1. táblázat). Így a poliéder egyértelmű megadásához elegendő megadnunk a hét lapsík egyenletét (2. táblázat).

2. táblázat

$$\begin{array}{lrrrrrrrrr}
(1) & & & & 4y & + & z & = & 12 \\
(2) & - & 2x & & & - & z & = & 12 \\
(3) & - & 5x & + & 5y & - & 7z & = & 21 \\
(4) & & 5x & - & 5y & - & 7z & = & 21 \\
(5) & & 2x & & & - & z & = & 12 \\
(6) & & & - & 4y & + & z & = & 12 \\
(7) & & & & & & z & = & 2
\end{array}$$

A megadott számhármasokból leolvashatjuk, hogy melyik három–három sík metszéspontja adja a poliéder csúcsait. A csúcsok koordinátáit ismerve pedig könnyen számítható a poliédert alkotó hatszögek éleinek és átlóinak a hossza, vagy egyéb, az elkészítéshez szükséges adat. A 4. ábrán megadjuk az egyes lapok megszerkesztéséhez az „összeállítási” rajzot.[4]

[4]Ilyen toroid létezését elsőként a cikk szerzője bizonyította. – *A szerk.*



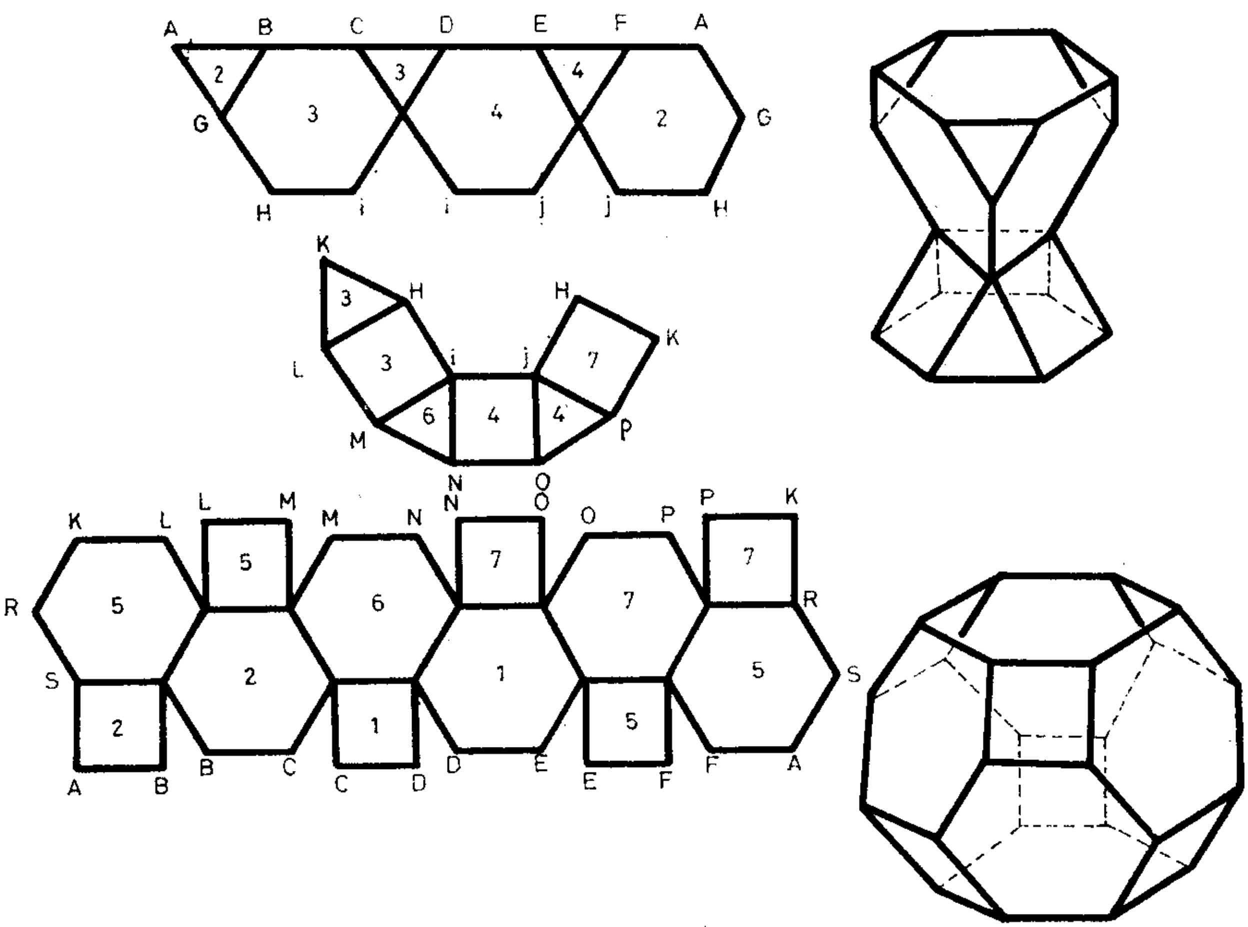
4. ábra

Ez a poliéder is szimmetrikus a koordináta–rendszer z tengelyére. Így az egybevágóság szempontjából lapjai négy, csúcsai hét osztályba sorolhatók.

Belátható, hogy hétnél kevesebb lapsíkkal egyáltalán nem állítható elő toroid, így ez a poliéder nemcsak az S_3 osztályban számít minimális lapszámúnak.

5. A múlt században felvetődött térképszínezési problémák (pl. a négy–színprobléma) közül *Heawood* 1890-ben igazolta, hogy a tóruszra rajzolt bármely térkép kiszínezéséhez elegendő hét szín. Ugyanekkor azt is megmutatta, hogy a hét szín szükséges is. Ugyanis rajzolt a tóruszra olyan hét tartományból álló térképet, amelynek bármely két tartománya szomszédos, így a helyes kiszínezéséhez minden tartományt különböző színűre kell festenünk. Az itt megismert poliéderrel ezt a Heawood–féle hétszínű térképet állítottuk elő, hét egyszerű síkbeli hatszögből.

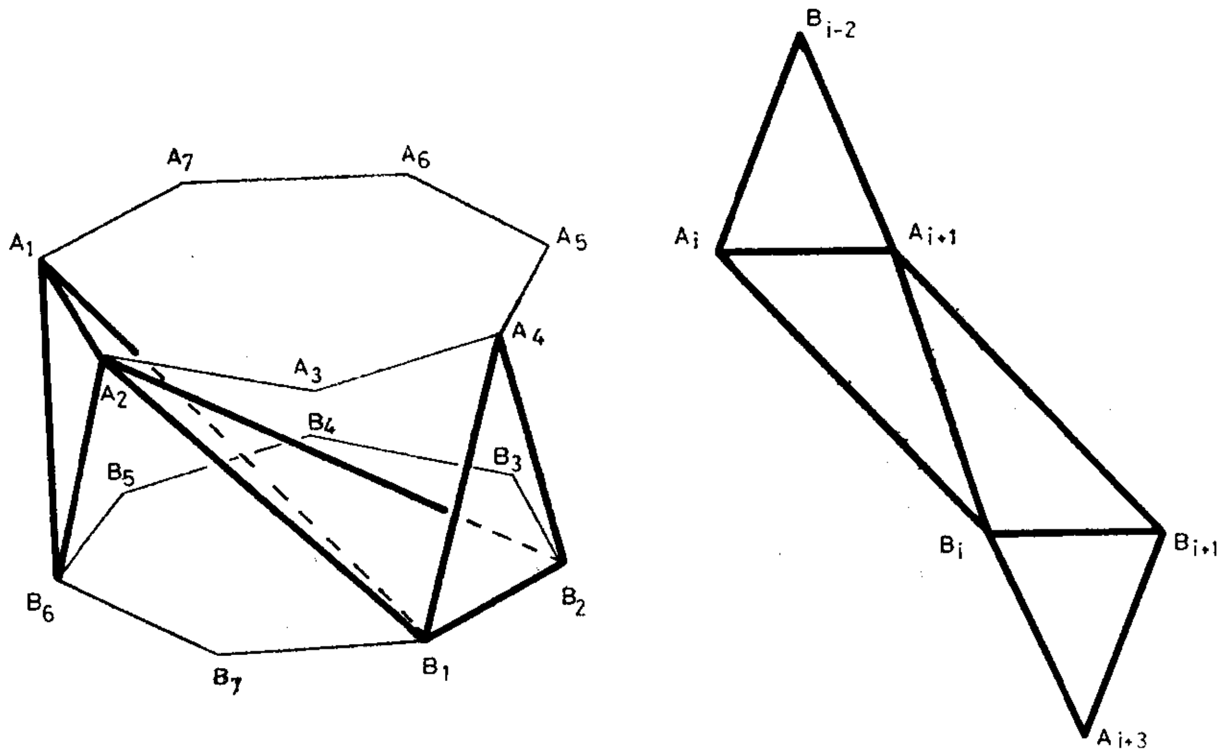
A Heawood–féle hétszínű térkép realizálható olyan toroiddal is, melynek minden lapja szabályos sokszög. (Persze akkor a tartományok már nem egyetlen lapból állnak.) Ennek a – B. M. *Stewart*-tól származó – konstrukciónak a hálózatát, valamint külön–külön a toroid „belső” és „külső” felét az 5. ábrán láthatjuk. A sokszögekre írt számok egy–egy színt jelölnek. Az ábrát vagy az ez alapján készített modellt vizsgálva meggyőződhetünk, hogy valóban minden szín szomszédos minden színnel.



5. ábra

Ugyancsak érdekes konstrukció az a toroid, amelyben az egyes tartományok nemcsak *szomszédosak*, hanem *egybevágók* is egymással. Egy–egy ilyen tartomány négy háromszögből áll, melyek közül kettő–kettő egybevágó.

Előállításához tekintsük az $A_1A_2\dots A_7$ szabályos hétszöget. Forgassuk el a középpontja körül $\frac{5}{2}\cdot\frac{2\pi}{7}$ nagyságú szöggel, majd toljuk el a síkjára merőleges irányban. Ily módon a $B_1B_2\dots B_7$ szabályos hétszöghöz jutunk. Színezzük azonos színűre, és nevezzük egy tartománynak az $A_iA_{i+1}B_{i-2}$, $A_iA_{i+1}B_i$, $B_iB_{i+1}A_{i+1}$, $B_iB_{i+1}A_{i+3}$ háromszögekből álló alakzatot, ahol $i = 1, 2, \dots, 7$ (6. ábra). [Ha valamelyik index nem esik 1 és 7 közé, akkor értelemszerűen adjunk hozzá vagy vonjunk le belőle 7-et, hogy 1 és 7 közötti számot kapjunk.]



6. ábra

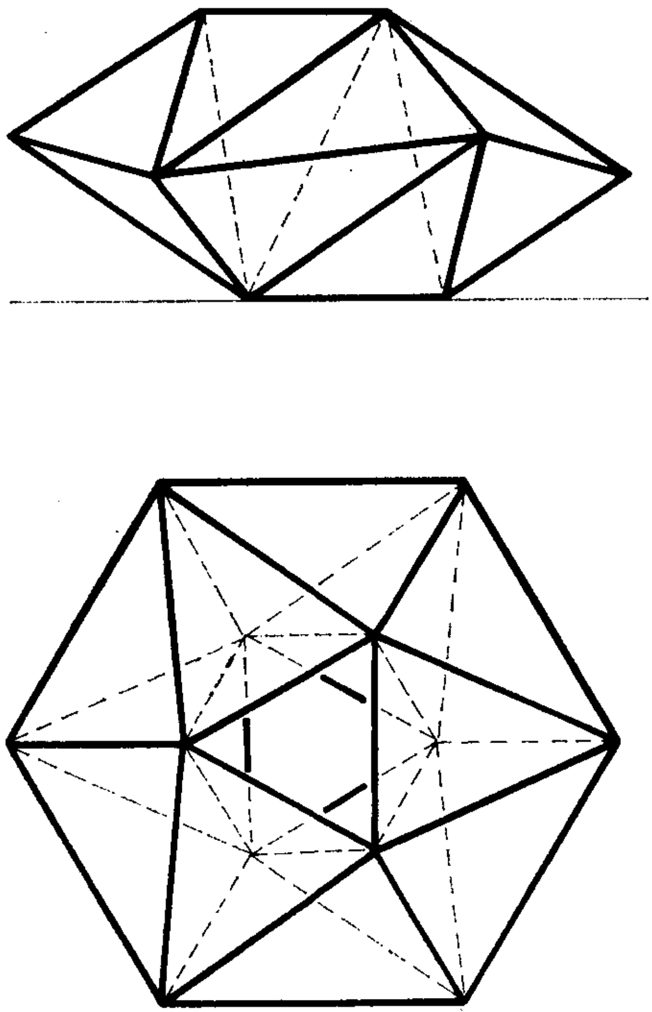
Ha az i-edik tartományt elforgatjuk a két szabályos hétszög középpontjaira illeszkedő tengely körül $\dfrac{2\pi}{7}$ nagyságú szöggel, akkor az $(i+1)$-edik tartományhoz jutunk. Így ezek a tartományok valóban egybevágók, és együtt egy toroidot alkotnak. A tartományt határoló, élek indexeit vizsgálva beláthatjuk, hogy valóban mindegyik mindegyikkel szomszédos. Pl. az i-edik tartomány $\overline{A_iB_i}$ éle menti szomszédja az $(i-1)$-edik, $\overline{A_iB_{i-2}}$ éle menti szomszédja az $(i-3)$-adik tartomány.

A poliéder előállításához tetszőlegesen megadhatjuk a két szabályos hétszög síkjának a távolságát, vagy pl. az egyenlő szárú $A_iA_{i+1}B_{i-2}$ háromszög oldalait. Ezekből a többi adat kiszámítható. A megadott, ill. kiszámított élhosszak mellett zárójelben közöljük az élhez tartozó lapszög nagyságát is. Legyen pl. $\overline{A_iA_{i+1}} = 6\,(51°45')$ és $\overline{A_iB_{i-2}} = 8\,(152°13')$. A többi él (számítással kapott) hossza: $\overline{A_iB_i} = 14{,}48\,(65°11')$ és $\overline{A_{i+1}B_i} = 11{,}35\,(325°13')$.

Ez a poliéder az S_1 osztályba tartozó olyan szabályos toroid, melynek lapjai az egybevágóság szempontjából két osztályt alkotnak, testszögletei pedig egyet, azaz *egybevágóak.*

Ennél kevesebb lap- és csúcsszámú, ugyanilyen (egybevágó testszögletű és kétféle lapból felépített) S_1 osztálybeli toroidot is kaphatunk, ha ebben a konstrukcióban a szabályos hétszög helyett hatszögből indulunk ki. (Ötszög már nem felelne meg, mert ennek az összes $\overline{A_iB_i}$ éle egy pontra illeszkedne.)

Vajon legkevesebb hány lapra van szükségünk ahhoz, hogy csupa egybevágó lapokból építhessünk toroidot? Ugyancsak B. M. Stewart konstruált olyan S_1 osztálybeli szabályos toroidot, amely 36 db egybevágó egyenlő szárú háromszögből áll. (B. M. Stewart: Adventures among the toroids, II. edition, 250. old.) A 7. ábrán bemutatott csupa egyenlő szárú háromszögekből álló toroidnak mindössze 24 lapja van.



7. ábra

Ez azonban nem szabályos, mert „belső” csúcsaiba hét, a „külsők”-be öt él fut be. Realizálásához lényegében egyetlen adat kell, a toroidot alkotó egyenlő szárú háromszög alapjának és szárának az aránya:

$$a : b = 2\sqrt{5 + 2\sqrt{2}} \approx 2 : 2{,}8.$$

Ennél kevesebb lapú, egybevágó lapokból álló toroid létezéséről nem tudunk.

Szilassi Lajos, Szeged