

Az 1982. évi Kürschák József Matematikai Tanulmányverseny feladatainak megoldása

1. Adott a térben egy egész oldalhosszúságú kocka, amelyről tudjuk, hogy az egyik lapján levő négy csúcs koordinátái valamennyien egész számok. Bizonyítandó, hogy a másik négy csúcs koordinátái is egész számok.

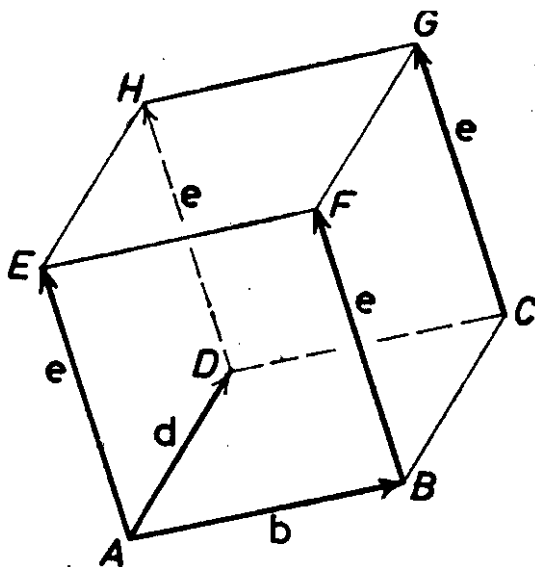
Megoldás. Fel fogjuk használni – amit a megjegyzések keretében be is bizonyítunk –, hogy az $\mathbf{r}(r_1, r_2, r_3)$ és az $\mathbf{u}(u_1, u_2, u_3)$ koordinátáival adott két vektor akkor és csak akkor merőleges, ha

$$r_1 u_1 + r_2 u_2 + r_3 u_3 = 0.$$

Legyenek egy $ABCDEFGH$ kocka egy lapjának A, B, C, D csúcsai egész koordinátájúak, a kocka élének hossza a szintén egész szám, az A -val szomszédos harmadik csúcs E . Azt kell belátnunk, hogy E, F, G, H is egész koordinátájú. Elég belátnunk, hogy pl. az $\overrightarrow{AE}$ vektor koordinátái egész számok, hiszen E, F, G, H koordinátáit úgy kaphatjuk, hogy A, B, C , ill. D koordinátáikhoz hozzáadjuk $\overrightarrow{AE}$ koordinátáit.

Legyenek az $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{d}$, $\overrightarrow{AE} = \mathbf{e}$ koordinátái

$$(b_1, b_2, b_3), \quad (d_1, d_2, d_3), \quad \text{ill} \quad (e_1, e_2, e_3).$$



Ezeket úgy kaphatjuk, hogy a B, D , ill. E pont koordinátáiból kivonjuk A koordinátáit. A $\mathbf{b}$ és $\mathbf{d}$ vektor koordinátái tehát egész számok, és azt kell belátnunk, hogy $\mathbf{e}$ koordinátái is azok. A $\mathbf{b}$ és $\mathbf{d}$ vektorok hossza a , és a vektorok merőlegesek, tehát koordinátáikra teljesül, hogy

$$(1) \quad b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = a^2, \quad (2) \quad d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = a^2, \quad (3) \quad b_1 d_1 + b_2 d_2 + b_3 d_3 = 0.$$

Az $\mathbf{e}$ vektor merőleges $\mathbf{b}$ -re is, $\mathbf{d}$ -re is és a hosszúságú, tehát

$$b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 = 0,$$

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = a^2.$$

$$d_1 e_1 + d_2 e_2 + d_3 e_3 = 0,$$

Az első két egyenletből kifejezhetjük e_1, e_2, e_3 -at, de ezt a **3** adatot a két egyenlet csak egy k közös szorzó tényező erejéig határozza meg. A számításokat elvégezve azt kapjuk, hogy

$$e_1 = k(b_2 d_3 - b_3 d_2), \quad e_2 = k(b_3 d_1 - b_1 d_3), \quad e_3 = k(b_1 d_2 - b_2 d_1).$$

A vektor hosszát kiszámítva

$$(4) \quad a^2 = k^2 \{ b_2^2 d_3^2 + b_3^2 d_2^2 + b_3^2 d_1^2 + b_1^2 d_3^2 + b_1^2 d_2^2 + b_2^2 d_1^2 - 2b_2 d_2 b_3 d_3 - 2b_1 d_1 b_3 d_3 - 2b_1 d_1 b_2 d_2 \}.$$

Bontsuk a kivonandókat 2-2 egyenlő tag összegére és a másik két tag egyikének, ill. másikkának egyik részével közös tényezőket emeljünk ki. Ekkor a kivonandó így alakul

$$\begin{aligned} & -b_2 d_2 b_3 d_3 - b_3 d_3 b_1 d_1 - b_2 d_2 b_3 d_3 - b_2 d_2 b_1 d_1 - b_1 d_1 b_2 d_2 - b_1 d_1 b_3 d_3 = \\ & = -b_3 d_3 (b_1 d_1 + b_2 d_2) - b_2 d_2 (b_3 d_3 + b_1 d_1) - b_1 d_1 (b_2 d_2 + b_3 d_3) = \\ & = -b_3 d_3 (-b_3 d_3) - b_2 d_2 (-b_2 d_2) - b_1 d_1 (-b_1 d_1). \end{aligned}$$

Az utolsó lépésben mindhárom tag második tényezőjére a (3) összefüggést alkalmaztuk. Eredményünket (4)-be beírva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} a^2 &= k^2 \{b_2^2 d_3^2 + b_3^2 d_2^2 + b_3^2 d_1^2 + b_1^2 d_3^2 + b_1^2 d_2^2 + b_2^2 d_1^2 + b_3^2 d_3^2 + b_2^2 d_2^2 + b_1^2 d_1^2\} = \\ &= k^2 \{(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2)\} = k^2 a^4, \quad k^2 = \frac{1}{a^2}. \end{aligned}$$

Az $\mathbf{e}$ vektor koordinátái tehát:

$$\frac{b_2 d_3 - b_3 d_2}{a}, \quad \frac{b_3 d_1 - b_1 d_3}{a}, \quad \frac{b_1 d_2 - b_2 d_1}{a},$$

vagy ezek ellentettjei. Világos, hogy ezek racionális számok, azt kell belátnunk, hogy egészek.

Elég ezt a fenti hármasról belátni, mert egész szám ellentettje is egész. Elég továbbá egyik koordinátáról belátni, hogy az egész, mert akkor az indexek alkalmas cseréjével adódik a másik kettő egész voltának a bizonyítása.

Azt fogjuk belátni, hogy a koordináta négyzete egész szám. Tudjuk, hogy *ha egy racionális szám négyzete egész szám, akkor az alap is egész szám*. Az első koordináta számlálójának négyzetét fogjuk átalakítani:

$$\begin{aligned} (b_2 d_3 - b_3 d_2)^2 &= b_2^2 d_3^2 + b_3^2 d_2^2 - 2b_2 d_2 b_3 d_3 = \\ &= b_2^2 d_3^2 + b_3^2 d_2^2 - b_2 d_2 (-b_1 d_1 - b_2 d_2) - b_3 d_3 (-b_3 d_3 - b_1 d_1) = \\ &= b_2^2 d_3^2 + b_3^2 d_2^2 + b_1 d_1 b_2 d_2 + b_2^2 d_2^2 + b_3^2 d_3^2 + b_1 d_1 b_3 d_3 = \\ &= b_2^2 d_3^2 + b_3^2 d_2^2 + b_2^2 d_2^2 + b_3^2 d_3^2 + b_1 d_1 (b_2 d_2 + b_3 d_3) = \\ &= (b_2^2 + b_3^2)(d_2^2 + d_3^2) - b_1^2 d_1^2 = (a^2 - b_1^2)(a^2 - d_1^2) - b_1^2 d_1^2 = a^2(a^2 - b_1^2 - d_1^2). \end{aligned}$$

Itt ismét két tagra bontottuk a kivonandót és egyszer az első, másszor a második két tényező szorzatát helyettesítettük a (3) összefüggésből adódó értékével, majd alkalmaztuk (1)-et, (2)-t és még egyszer (3)-at.

Azt nyertük tehát, hogy

$$\left(\frac{b_2 d_3 - b_3 d_2}{a} \right)^2$$

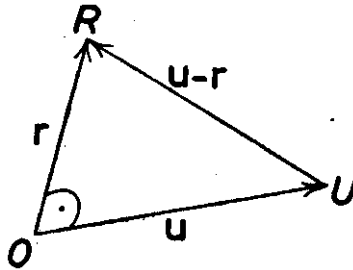
egész szám, és ebből – mint már említettük – következik az alap egész volta is. Ezzel a feladat állítását bizonyítottuk.

Megjegyzések. 1. A megoldás elején kimondott állítás így látható be: Az, hogy r és u merőleges egymásra, azt jelenti, hogy az ORU háromszög derékszögű (a 2. ábra betűzését használjuk), ez pedig egyenértékű állítás azzal, hogy a háromszög oldalaira teljesül Pitagorász tétele. Az $\mathbf{r}$ – $\mathbf{u}$ vektor koordinátái $(r_1 - u_1, r_2 - u_2, r_3 - u_3)$, így a feltételt koordinátákkal felírva

$$\begin{aligned} r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 &= (r_1 - u_1)^2 + (r_2 - u_2)^2 + (r_3 - u_3)^2 = \\ &= r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - 2(r_1 u_1 + r_2 u_2 + r_3 u_3). \end{aligned}$$

Ez pedig valóban egyenértékű azzal, hogy

$$r_1 u_1 + r_2 u_2 + r_3 u_3 = 0.$$



2. Aki ismeri a vektorok skaláris szorzatát, annak a most levezetett összefüggés jól ismert, aki pedig a vektoriális szorzatot is ismeri, az tudja, hogy az $\mathbf{e}$ vektor koordinátaiban k szorzói a vektorszorzat koordinátái, és azt is, hogy merőleges vektorok vektorszorzatának a hossza a tényezők hosszának a szorzata, esetünkben tehát a^2 . Így k vagy $\frac{1}{a}$ vagy $-\frac{1}{a}$. Ezeket felhasználva lényegesen lerövidül a megoldás.

3. A bizonyítás végén felhasznált tétel: ha egy racionális szám négyzete egész, akkor az alap is egész, a számelmélet alaptételének a következménye. E tétel szerint az egész számok törzstényezőkre bontott alakjában a tényezők sorrendtől eltekintve egyértelműen vannak meghatározva.

Valóban, ha egy v/w tört (v, w egész) nem egész szám, akkor w -nek van olyan p törzstényezője, ami v felbontásában kisebb hatványon szerepel, mint w -ében (esetleg egyáltalán nem szerepel). De

$$\left(\frac{v}{w} \right)^2 = \frac{v^2}{w^2}.$$

Az alaptétel szerint v^2 -nek és w^2 -nek nincs más prímtényező felbontása, mint amelyik a v , ill. w felbontásában szereplő prímelek hatványkitevőinek kétszerezésével keletkezik. Ekkor azonban p a v^2/w^2 tört nevezőjében is magasabb hatványon szerepel, mint, a számlálóban, tehát ez a tört sem lehet egész szám.

2. Bizonyítsuk be, hogy minden $k > 2$ egész számhoz létezik végtelen sok olyan n természetes szám, hogy az $n, n+1, \dots, n+k-1$ számok legkisebb közös többszöröse nagyobb, mint az $n+1, n+2, \dots, n+k$ számok legkisebb közös többszöröse.

(A legkisebb közös többszörös annyiszor fordul elő az alábbi szövegben, hogy röviden lkkt-t írunk helyette.)

I. megoldás. Az $a_1, a_2, \dots, a_m$ számok lkkt-ét – amit így szokás jelölni: $[a_1, a_2, \dots, a_m]$, – úgy határozhatjuk meg, hogy minden prímszámot, amelyik a számok valamelyikének osztója, vesszük azon a legmagasabb hatványon, amelyiken osztója valamelyik a_i -nek, és ezeket a prímszámhatványokat összeszorozzuk. Eszerint

$$T_n = [n, n+1, \dots, n+k-1] \text{ és } T_{n+1} = [n+1, n+2, \dots, n+k-1, n+k]$$

prímhatványokra történő felbontásában egyenlő hatványon szerepelnek azok a prímszámok, amelyeknek a legmagasabb hatványa az $n+1, n+2, \dots, n+k-1$ számok valamelyikének a felbontásában fordul elő. T_n -ben magasabb hatványon szerepelnek, mint T_{n+1} -ben azok a prímelek (ha vannak), amelyeknek magasabb hatványa osztója n -nek, mint $n+1, \dots, n+k$ bármelyikének, és alacsonyabb hatványon azok az esetleges prímelek, amelyeknek magasabb hatványa osztója $n+k$ -nak, mint $n, \dots, n+k-1$ bármelyikének.

Legyenek $p_1, \dots, p_g$ az előbbi tulajdonságú prímelek és legyen p_j a T_n -nek (s így n -nek is) a t_j -edik hatványon osztója, T_{n+1} -nek az u_j -edik hatványon osztója, ahol $t_j > u_j$ ($j = 1, \dots, g$); hasonlóan legyenek az utóbbi tulajdonsággal rendelkező prímelek $q_1, \dots, q_h$ és q_j T_n -nek v_j -edik, T_{n+1} -nek w_j -edik hatványon osztója, $v < w_j$ ($j = 1, \dots, h$). Ekkor

$$(1) \quad T_{n+1} = \frac{q_1^{w_1-v_1} \dots q_h^{w_h-v_h}}{p_1^{t_1-u_1} \dots p_g^{t_g-u_g}} T_n.$$

Végtelen sok olyan n értékre van tehát szükségünk, amelyekre a T_n a jobb oldalon 1-nél kisebb számmal van megszorozva. Ehhez legegyszerűbb n -et úgy választani, hogy $n+1, \dots, n+k-1$ egyikével se legyen 1-nél nagyobb közös osztója, $(n+k)$ -nak viszont legalább az egyikükkel legyen. Ekkor a tört nevezője n lesz, a számlálója pedig legfeljebb $\frac{n+k}{2}$. A tört tehát nem nagyobb, mint $\frac{n+k}{2n}$; ez pedig 1-nél kisebb, ha n nagyobb k -nál.

Ha végtelen sok n -re kielégítjük az első két feltételt, akkor közülük végtelen sok nagyobb is lesz mint k , tehát elég olyan n egészeket keresnünk, amelyekre n relatív prím az $n+1, \dots, n+k-1$ számokhoz, $n+k$ pedig legalább egyikhez nem relatív prím. A feladatot megoldó versenyzők mind ezt az utat választották, de az n kívánt tulajdonságait igen különböző, módokon biztosították. Bemutatjuk a lényegében legegyszerűbbnek látszót.

Ha valamilyen j -re n -nek és $(n+j)$ -nek van 1-nél nagyobb közös osztója, akkor ez közös osztója n és $(n+j)-n = j$ -nek is és megfordítva is: n és j közös osztói $(n+j)$ -nek is osztói. Azt kell tehát elérnünk, hogy kiválasztandó számaink az

$$(*) \quad 1, 2, \dots, k-1$$

számokhoz relatív prímelek legyenek, tehát például a szorzatukhoz is. Ezzel a tulajdonsággal rendelkeznek az¹

$$1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k-1)$$

szorzat többszöröseinek a szomszédai, tehát a $c((k-1)!) \pm 1$ számok.

Ahhoz, hogy a k -val nagyobb $c((k-1)!) + k \pm 1$ a $(*)$ alatti számok valamelyikéhez ne legyen relatív prím, a kettős előjelből a negatívát célszerű választani. Ez esetben a k -val növelt szám osztható $(k-1)$ -gyel, és az $(n+1)$ -ként adódó $c((k-1)!)$ is osztható $(k-1)$ -gyel.

Ha tehát az

$$n_c = c((k-1)!) - 1$$

számokat választjuk, az (1) egyenlőség nevezője n_c lesz, számlálója pedig legfeljebb

$$\frac{n_c + k}{k-1}.$$

Így

$$T_{n_c+1} \leq \frac{n_c + k}{(k-1)n_c} T_{n_c}.$$

¹ Ezt a szorzatot „ k -1 faktoriális”-nak nevezik és így jelölik: $(k-1)!$

Itt $k - 1 \geq 2$, mert a feladat feltétele szerint $k > 2$. Ha tehát $n_c > k$ is teljesül (ami $k = 3$ -nál $c \geq 3$ -ra, $k > 3$ esetén minden pozitív egész c -re igaz), akkor

$$\frac{n_c + k}{(k - 1)n_c} < 1, \text{ tehát } T_{n_c+1} < T_{n_c}.$$

Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

Megjegyezzük, hogy $k = 2$ -re nem igaz a feladat állítása, $[n, n + 1] = n(n + 1)$ és ez növekvő n -nel állandóan növekszik.

Megjegyzések. 1. A lkkt-nek a megoldás elején ismertetett megadásmódja ismét az első feladathoz fűzött 3. megjegyzésben említett számelmélet alaptételéből következik.

2. Egy versenyző $(k - 1)!$ helyett a lényegesen kisebb $[1, 2, \dots, k - 1]$ számot használta, de elég lett volna ehelyett a k -nál kisebb prímek szorzatát venni, amint azt könnyen beláthatja az olvasó. Összehasonlításképp már $k = 21$ -re $(k - 1)!$ felette van a 4700 billiónak, $[1, 2, \dots, k - 1]$ közel 233,3 millió, a prímek szorzata pedig valamivel 9,7 millió alatt van.

II. Megoldás. Megkaphatjuk az $[n, n + 1, \dots, n + k - 1]$ lkkt-t úgy is, hogy az $n(n + 1) \dots (n + k - 1)$ szorzatot elosztjuk bizonyos számokkal, tehát

$$(2) \quad [n, n + k, \dots, n + k - 1] = \frac{n(n + 1) \dots (n + k - 1)}{v_{n,k}}$$

alakban, ahol $v_{n,k}$ természetes szám.

Mielőtt ennek helyességét belátnánk, nézzük meg, hogyan alakul ennek felhasználásával a feladat állításában szereplő egyenlőtlenség. A megfelelő kifejezéseket beírva, kézenfekvő átalakításokkal az

$$nv_{n+1,k} > (n + k)v_{n,k}$$

vagy

$$(3) \quad n(v_{n+1,k} - v_{n,k}) > kv_{n,k}$$

adódik. A bal oldalnak pozitívnak kell lennie, amihez

$$(4) \quad v_{n+1,k} > v_{n,k}$$

szükséges. Ha ez fennáll, akkor az utolsó egyenlőtlenség bizonyosan teljesül, ha maga n nagyobb a jobb oldalnál, mert a szorzója legalább 1.

Ezek alapján a feladat állítása következik abból, ha megmutatjuk, hogy

- a) Minden adott k -ra $v_{n,k}$ egy csak k -tól függő korlátnál nem nagyobb, és
- b) ha $k \geq 3$, adott, akkor $v_{n,k}$ értéke végtelen sokszor változik.

Valóban a b) szerinti változás nem lehet valamilyen határon túl mindig csökkenés, hiszen $v_{n,k}$ -nak mindig pozitív egésznek kell lennie, de nem lehet valamilyen értéken túl mindig növekedés sem, hiszen akkor $v_{n,k}$ minden korláton túlnőne, ami a) miatt nem lehet. Van tehát végtelen sok olyan n , amelyre (4) teljesül.

Legyen V egy olyan érték, aminél $v_{n,k}$ sohasem nagyobb, akkor mindazokra az n -ekre, amikre (4) teljesül és amelyek kV -nél nagyobbak, igaz, hogy

$$n(v_{n+k-1} - v_{n,k}) > kV \geq kv_{n,k},$$

tehát teljesül (3), abból pedig a feladat állításában szereplő egyenlőtlenség ekvivalens átalakításokkal következik.

A feladat állításának bizonyításához tehát elég a (2) alakú előállítás létezését bizonyítani (egész nevezővel) és a nevező a) és b) tulajdonságát.

A (2) felbontáshoz eljuthatunk úgy, hogy leírjuk egyenként a számláló tényezőit és $n + j$ leírása után ($1 \leq j \leq k - 1$) nézzük annak prímszámhatványok szorzatára bontott alakját. Ha van a prím alapok közül valamelyiknek korábban is többszöröse, akkor veszünk egy olyan $n + i$ ($0 \leq i < j$) tényezőt, amelyik az illető prím legnagyobb hatványával osztható, és ha ez a hatvány nem nagyobb az $(n + j)$ -ben szereplő hatványnál, akkor a nevezőbe írjuk, különben az $(n + j)$ -ben fellépő hatványt írjuk a nevezőbe. Világos, hogy így a k -adik lépésben megkapjuk a keresett lkkt-t. $v_{n,k}$ a nevezőbe került prímszámhatványok szorzata.

A nevezőbe írt prímszámhatvány osztója $(n + i)$ -nek is, $(n + j)$ -nek is, tehát a különbségüknek $j - i$ -nek is, ami pozitív és nem nagyobb j -nél. Az $n + j$ sorra vételénél tehát a $j, j - 1, \dots, 2$ bizonyos prímszámhatvány osztóival osztunk, tehát összességében nem nagyobb számmal, mint $j!$ Ezt $j = 1, 2, \dots, (k - 1)$ -re alkalmazva kapjuk, hogy

$$v_{n,k} \leq 2! 3! \dots (k - 1)!,$$

$v_{n,k}$ csak véges sok értéket vesz fel.² Ezzel beláttuk a (2) alakú felbontás létezését és az a) állítást. Igazoljuk még b)-t.

² Belátható, hogy az is igaz, hogy $v_n \leq (k - 1)!$ pontosabban $v_{n,k} | (k - 1)!$, és az egyenlőtlenségben végtelen sokszor az „=” jel érvényes.

Világos, hogy $v_{n,2} = 1$ minden n -re.

Legyen p egy k -nál kisebb prímszám, amelyik nem osztója k -nak. – Ilyenek pl. a $k-1$ (≥ 2) prímosztói. – Válasszuk n -et úgy, hogy $n+k$ többszöröse legyen p -nek, és vizsgáljuk p kitevőjét $v_{n,k}$ és $v_{n+1,k}$ prímszámhatványok szorzatára bontott alakjában.

Nem lehet n is többszöröse p -nek, mert különben az $(n+k) - n = k$ is osztható volna p -vel, ellentétben p választásával.

Mivel $p < k$, van többszöröse az $n+1, n+2, \dots, n+k-1$ számok közt. Ha áttérünk $[n, n+1, \dots, n+k-1]$ -ről $[n+1, \dots, n+k-1, n+k]$ -ra, akkor a (2) jobb oldalának számlálójából elmarad a p -vel nem osztható n tényező és megjelenik a p -vel osztható $n+k$. Világos, hogy n elhagyása a p kitevőjét nem befolyásolja, viszont $n+k$ hozzávétele után az előállításra vonatkozó gondolatmenetet követve látható, hogy a nevezőbe kell írunk p -nek valamilyen hatványát. $v_{n+1,k}$ tehát p -nek magasabb hatványával osztható, mint $v_{n,k}$, s így (függetlenül esetleges egyéb különbségektől) különböző számok, mivel a számok prímszámhatványokra történő felbontása lényegében egyértelmű.

Megjegyzések. 1. Az I. megoldás során több módon is megadtunk adott k -hoz végtelen sok olyan n értéket, amire teljesül a $T_n < T_{n+1}$ egyenlőtlenség, de távolról sem adtuk meg az összes ilyen n -et. Ez reménytelenül nehéz feladatnak is látszik.³ Belátható, hogy a legkisebb n is, ami ott adódik, sokkal nagyobb k -nál.

Jelöljük n_k -val adott k -hoz a legkisebb olyan n -et, amire teljesül a $T_n < T_{n+1}$ egyenlőtlenség. Néhány értéket a következő táblázat mutat:

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	29	30	31	32	210
n_k	–	5	5	7	9	8	11	11	11	13	13	17	16	17	17	31	47	32	37	237

Láthatólag ezek az értékek alig nagyobbak k -nál. Az világos, hogy n_k -nak k -nál nagyobbak kell lennie, mert ha $n \leq k$, akkor az $n+1, \dots, n+k$ között van n -nel osztható, hiszen $2n \leq n+k$. Így $[n+1, \dots, n+k]$ osztható n -nel, és természetesen $n+1, \dots, n+k-1$ -gyel is, tehát $[n, \dots, n+k-1]$ osztója $[n+1, \dots, n+k]$ -nak, amiből következik, hogy nem lehet az előbbi nagyobb.

A prímszámok eloszlására vonatkozó mély tételek segítségével belátható, hogy n_k/k tetszés szerinti 1-nél nagyobb h számnál kisebb lesz, amint k egy alkalmas (h -tól függő) korlátnál nagyobb.

2. Számolás közben sok olyan n -re találunk, amelyre $[n, \dots, n+k-1] = [n+1, \dots, n+k]$. Ez $n = k$ -ra pl. csak akkor nem teljesül, ha k a 2-nek egy hatványa. De $k = 19$ -re pl. $n = 19$ -tól $n = 22$ -ig négy egymás utáni értékre teljesül az egyenlőség, $k = 210$ -re, pedig $n = 213$ -tól $n = 220$ -ig nyolc egymás utáni esetben. Ezek után első pillanatra talán meglepően hat, hogy minden k -hoz legfeljebb véges sok esetben lehet két szomszédos lkkt egyenlő, pedig a (2) formula alapján ez legfeljebb az

$$n = \frac{kv_{n,k}}{v_{n+1,k} - v_{n,k}}$$

értékekre teljesül (és közülük az egész értékekre teljesül is). Mivel pedig $v_{n,k}$ csak véges számú különböző értéket vehet fel, így csak véges számú megfelelő n létezik.

3. Az egész számok halmazát kiszíneztük száz színnel úgy, hogy mind a száz színt felhasználtuk és teljesül a következő: bárhogyan is választunk két $[a, b]$ és $[c, d]$ egyforma hosszú, egész végpontú intervallumot, ha a színe ugyanaz, mint c színe és b színe ugyanaz, mint d színe, akkor $[a, b]$ és $[c, d]$ teljes színezése megegyezik (azaz $0 \leq x \leq b-a$, x egész esetén $a+x$ és $c+x$ színe azonos). Bizonyítsuk be, hogy -1982 és 1982 színe különböző.

I. megoldás. A feladat feltételeiből következik, hogy az egész számok színezése 100 hosszúságú periódusokban ismétlődik az egész számegyenes mentén, és egy perióduson belül minden szín előfordul.

Ha ezt belátjuk, ebből következik, hogy két szám színe akkor és csak akkor egyezik meg, ha különbségük a 100 többszöröse. -1982 és 1982 tehát különböző színű, mert különbségük 3964, nem osztható 100-zal.

A színezés periodikus voltának belátásához előbb belátjuk, hogy

a) van olyan A és d_1 természetes szám, amelyekre minden A -nál nagyobb szám színe megegyezik a d_1 -gyel nagyobb számával,

b) hasonlóan van olyan B és d_2 természetes szám, hogy minden $-B$ -nél kisebb egész színe megegyezik a d_2 -vel kisebb számával,

c) ezután belátjuk, hogy a két periodikus részszínezés az egész számegyenes egyetlen periodikus színezésének a része.

Az a) és b) részállítás bizonyítása ugyanazon gondolatmenettel történhet, elég tehát az a) állítás bizonyítását részletezni.

Nevezzük *alapszámköz*-nek azokat a számközöket, amelyeknek a kezdő és végső száma ugyanolyan színű és más egyező színű számpár nincs a számközben.

Egy alapszámköz legfeljebb 101 egész számot tartalmazhat, mert 100 színünk van, s így bármelyik számtól elindulva legkésőbb a 101-edik színe kell, hogy megegyezzen az előzők valamelyikével. Minden 101 egészet tartalmazó számköz tartalmaz is alapszámközt, hiszen az első számtól elindulva addig megyünk, míg először nem érünk a számköz egy korábbi számával egyező színű számához; ekkor ez a két egyező színű szám alapszámközt fog közre.

³ Figyeljük meg, hogy a II. megoldás csak végtelen sok ilyen n létezését bizonyítja, anélkül, hogy megadna ilyen n -eket. Annak a gondolatmenetnek az alapján csak a $v_{n,k}$ nevezők szerkezetének sokkal pontosabb ismerete tenné lehetővé ilyen n -ek megadását.

A természetes számok közt végtelen sok alapszámköz van, hiszen pl. a $[101n, 101n+100]$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) számközök 101–101 egészéből állnak, s így mindegyik tartalmaz alapszámközt. Mivel egy alapszámköz legalább 2 és legfeljebb 101 egészet tartalmaz, kell olyan d_1 egésznek lennie, hogy végtelen sok alapszámköz $d_1 + 1$ egészet (d_1 különböző színűt) tartalmaz. Legyenek $[a_i, a_i + d_1]$ ($i = 1, 2, \dots$ és $a_i \geq 0$), $d_1 + 1$ pozitív egészéből álló alapszámközök. Megmutatjuk, hogy minden $A = a_1$ -nél nagyobb n -re n és $n + d_1$ színe megegyezik.

Legyen $n > A$. Mivel az a_i nem-negatív egészek sorozata végtelen, választhatjuk j -t úgy, hogy $a_j \geq n$ teljesüljön. Az alapszámköz definíciójából következik, hogy az $[A, a_j]$ és az $[A + d_1, a_j + d_1]$ számközök kezdő számai is egyező színűek, a záró egészek is. Világos, hogy a két számköz ugyanannyi egészéből áll és j választása szerint n az első számközhöz tartozik. A feladatnak a színezésre vonatkozó feltétele szerint ekkor következik, hogy $n + d_1$ színe megegyezik n színével. Ezzel az $a)$ állítást igazoltuk. Meggondolásainkat a negatív egészekből álló alapszámközökre alkalmazva kapjuk a $b)$ állítást igazolását.

Az $a)$, ill. $b)$ állítás helyességéből természetesen az is következik, hogy ha k pozitív egész és $n > A$, ill. $m < -B$, akkor n és $n + kd_1$, ill. m és $m - kd_2$ egyező színű.

A két periodikus rész kapcsolatának tisztázásához jegyezzük meg először is, hogy mind a két rész periodikus pl. $d_1 \cdot d_2$ szerint, hiszen csak a fenti állításban k helyett az első esetben d_2 -t, a másodikban d_1 -et kell írni. Megmutatjuk, hogy ez igaz az egész számegyenesre is.

Legyen ugyanis r tetszés szerinti egész, $u < -B$, $v > A$, továbbá $u \leq r \leq v$. Ekkor $u - d_1d_2$ és u , ill. v és $v + d_1d_2$ egyező színűek, így az $[u - d_1d_2, v]$ és $[u, v + d_1d_2]$ kielégítik a feladatban szereplő feltételeket, és az első tartalmazza r -et, így következik, hogy r és $r + d_1d_2$ ugyanolyan színű.

Azt kell még belátnunk, hogy a legrövidebb periódushossz 100. Itt használjuk ki azt az eddig még nem értékesített tényt, hogy egy egyik végpontjától megfosztott alapszámköz csupa különböző színű pontból áll. Eszerint az A -nál nagyobb egészek d_1 színnel vannak színezve, nem kevesebbel, mert tartalmaznak $d_1 + 1$ elemből álló alapszámközt, de nem is többel, hiszen színezésük d_1 hosszúságú egyező periódusokból tevődik össze.

Ekkor azonban az egész számegyenes is d_1 színnel van színezve, mert tetszés szerinti r egészhez van olyan s pozitív egész, hogy $r + s d_1d_2 > A$. Ekkor r és $r + s d_1d_2$ színe egyező, de az utóbbi szám színe csak az A -nál nagyobb számoknál használt d_1 szín valamelyike lehet. Az összes egész tehát d_1 színnel van színezve, vagyis $d_1 = 100$. Továbbá minden d_1d_2 hosszúságú periódus előfordul az A -nál nagyobb számok közt is, tehát d_2 darab egyező színezésű részperiódusból tevődik össze. Az összes egész színezése tehát $d_1 = 100$ különböző színű, egymás utáni egész színezésének periodikus ismétlésével származtatható. Mint láttuk, ebből a feladat állítása is következik.

Megjegyzések. 1. Nyilván nincs a 100-nak kitüntetett szerepe (azon kívül, hogy nem osztója 3964-nek). Ha 100 helyett k színt használunk fel a feladatban kívánt feltételeket kielégítve, akkor ezt csak úgy tehetjük, hogy k szomszédos pont különböző színű legyen és ez a színezés periodikusan ismétlődjék.

2. Ha csak a feladat állításának bizonyítására törekszünk, ehhez eljuthatunk anélkül, hogy az egész számegyenes színezését tisztáznánk.

II. Megoldás. Legyen M 1982-nél nagyobb természetes szám, továbbá akkora, hogy a $[-M, M]$ számköz egészeinek színezésében mind a 100 szín előforduljon. Az M -nél nagyobb számok színezésében legalább egy S_1 színnek végtelen sokszor elő kell fordulnia. Legyenek az S_1 színű számok

$$M + a_1 < M + a_2 < \dots$$

A

$$-M - a_1, -M - a_2, \dots, -M - a_{101}$$

számok között kell legalább két egyszínűnek lennie, mondjuk $-M - a_j$ és $-M - a_i$ S_2 színű ($i < j$). Ekkor a

$$[-M - a_j, M + a_i] = I \quad \text{és} \quad [-M - a_i, M + a_j] = J$$

számközök kezdő számai S_2 színűek, a végsők S_1 színűek és egyaránt $2M + a_i + a_j + 1$ egészet tartalmaznak. A feladat feltételei szerint így színezésük megegyezik.

A két számköz részben átfedi egymást, $[-M - a_i, M + a_i]$ mindkettőhöz hozzátartozik. A csak I -hez tartozó

$$(1) \quad -M - a_j, \dots, -M - a_i - 1$$

számok számát jelöljük d -vel ($d = a_j - a_i$). Mivel I és J ugyanúgy van színezve, így speciálisan

$$[-M - a_j, -M - a_i] = I_1 \quad \text{és} \quad [-M - a_i, -M - a_i + d] = J_1$$

részeik színezése is megegyezik.

Az (1) számok közt balról az első két egyező színű legyen, ha van

$$b_1 = -M - a_j + b, \quad \text{és} \quad b_1 + d_1,$$

színük legyen S_3 . Ha az (1) számok mind különböző színűek, akkor $d_1 = d$, $b_1 = -M - a_j$, $b_1 + d_1 = b_1 + d = -M - a_i + d = -M - a_j$, és $S_3 = S_2$. Ez azt jelenti, hogy

$$-M - a_j, -M - a_j + 1, \dots, -M - a_j + b, -M - a_j + b + 1, \dots, -M - a_j + b + d_1 - 1$$

számok mind különböző színűek. Itt $b = 0$ is lehet, ez esetben csak az utolsó d_1 számú számról van szó; egyébként ekkor $S_3 = S_2$, I_1 és J_1 egyező színezése folytán

$$b_2 = b_1 + d, \quad \text{és} \quad b_2 + d_1$$

színe is S_3 . Ekkor viszont a

$$[b_1, b_2] = I_2, \quad [b_1 + d_1, b_2 + d_1] = J_2$$

számközökre is teljesülnek a feladatban szereplő feltételek, tehát ezeknek a számközöknek is megegyezik a színezése.

Belátjuk, hogy d_1 osztója d -nek és I_1 színezése periodikus d_1 periódussal. Ez nyilvánvaló, ha $d_1 = d$, s így $b_1 = -Ma_j$, $b_1 + d_1 = -M - a_i$. Feltéhetjük tehát, hogy $d_1 < d$. Ekkor $b_1 + d_1$ benne van a $[b_1, b_2]$ számközben. Így I_2 és J_2 -re nyert színezési feltétel szerint $[b_1, b_1 + d_1]$ és $[b_1 + d_1, b_1 + 2d_1]$ ugyanúgy van színezve.

Ha még $b_1 + 2d_1$ is benne van I_1 -ben, akkor I_2 és J_2 színezésének egyezése folytán az utóbbi számköz és a hozzá csatlakozó $[b_1 + 2d_1, b_1 + 3d_1]$ színezése is megegyezik. Legyen k_1 az az egész, amelyre $b_1 + (k_1 - 1)d_1 \leq -M - a_i < b_1 + k_1 d_1$, akkor a gondolat ismételt alkalmazásával azt kapjuk, hogy a

$$[b_1, b_1 + d_1], [b_1 + d_1, b_1 + 2d_1], \dots, [b_1 + (k_1 - 1)d_1, b_1 + k_1 d_1]$$

számközök színezése mind megegyezik, és pedig az utolsó számtól eltekintve csupa különböző színű számból áll mindegyik.

Az utolsó számköz részben a J_1 elejét fedi. Ez csak úgy lehet, hogy $b = 0$, mert különben az I_1 -gyel egyező színezésű J_1 a $[b_1, b_1 + d_1]$ -ben, s így $[b_1 + (k_1 - 1)d_1, b_1 + k_1 d_1]$ -ben sem szereplő színű számokkal kezdődne. Ez azt is jelenti, hogy $b_1 = -M - a_j$, s így $S_3 = S_2$. De nem lehetséges az sem, hogy $b_1 + (k_1 - 1)d_1 < -M - a_i$ legyen, mert ekkor a $[b_1 + (k_1 - 1)d_1, b_1 + k_1 d_1]$ számköz belsejében is volna egy S_2 színű, tehát a szélső számokkal egyező színű szám.

Ezzel beláttuk, hogy az I_1 utolsó számának elhagyásával keletkező számköz egymással egyező színezésű, d_1 különböző színű számból álló számközökből tevődik össze.

Térjünk végül vissza az egyező színezésű és egymást részben átfedő I és J számközökhöz. Láttuk, hogy

$$[-M - a_j, -M - a_i], \text{ és } [-M - a_i, -M - a_i + d]$$

számközök színezése megegyezik. Ha az utóbbi számköz még teljesen I -hez tartozik, akkor $[-M - a_i + d, -M - a_i + 2d]$ színezése megegyezik az előbbi két számközével. Ha k az az egész, amelyre

$$-M - a_j + (k - 1)d \leq -M - a_i < -M - a_j + kd,$$

akkor a

$$[-M - a_j, -M - a_i], [-M - a_i, -M - a_i + d], \dots \\ [-M - a_i + (k - 1)d, -M - a_i + kd]$$

egymáshoz csatlakozó számközök ugyanúgy vannak színezve és lefedik a $[-M - a_j, M + a_i]$ számközt, tehát mindenesetre a $[-M, M]$ számközt is. Ezek színezése tehát előző megállapításaink szerint d_1 szerint periodikus, és egy periódus d_1 különböző színű számból áll. Mivel $[-M, M]$ -ben mind a 100 szín előfordul, így $d_1 = 100$, és két szám színe pontosan akkor egyezik meg, ha különbségük osztható 100-zal. -1982 és 1982 tehát különböző színű.

Megjegyzés. Látszólag itt csak egy véges számközzel bizonyítottuk be, hogy színezése periodikus 100 periódussal, valójában azonban ez a bizonyítás azt is adja, hogy az egész számegyenes periodikusan van kiszínezve 100 hosszúságú periódussal. Legyen ugyanis n tetszőleges egész szám és M akkora, hogy a $[-M, M]$ számköz tartalmazza n -et, $n + 100$ -at és színezésében mind a 100 szín előfordul. Az elmondott bizonyítás ekkor is azt adja, hogy a $[-M, M]$ számköz periodikusan van színezve 100 hosszúságú, különböző színű számokból álló periódussal, tehát n és $n + 100$ egyező színű, $n, n + 1, \dots, n + 99$ viszont különböző színű számok.