Az alábbiakban az origó középpontú körlapok által tartalmazott rácspontok számáról lesz szó. Erre először egy közelítő formulát adunk (1. tétel), majd egy pontos képletet (2. tétel). A kettő egybevetéséből szép bizonyítást nyerünk *Leibniz* egy tételére, amely szerint

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots=\frac{\pi}{4}.$$

Rácspontoknak a sík azon pontjait nevezzük, amelyek mindkét koordinátája egész szám. Az origó középpontú, r sugarú körlapot $K(r)$-rel jelöljük; a $K(r)$ körlapba eső rácspontok száma legyen $N(r)$. Lássuk először a közelítő formulát; ez *Gauss*tól származik.

1. Tétel. *$r \geqq 3$ esetén $\pi r^2-5r<N(r)<\pi r^2+5r$.*

Bizonyítás. A $K(r)$ körlap minden rácspontja köré írjunk egységnyi oldalhosszúságú és a tengelyekkel párhuzamos oldalú négyzetet, amelynek a középpontja a kiszemelt rácspont. Az így kapott négyzetek egyrétűen lefednek egy D tartományt, amelynek a területe nyilván megegyezik a $K(r)$-be eső rácspontok számával, azaz $N(r)$-rel. D bármely pontjának az origótól vett távolsága legfeljebb $r+\frac{\sqrt{2}}{2}$, hiszen ha a P pont az U rácspont köré írt négyzetben van, akkor P és U távolsága legfeljebb $\frac{\sqrt{2}}{2}$, és U távolsága az origótól legfeljebb r. Így a $K\left(r+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ körlap lefedi D-t, tehát D területe, $N(r)$ legfeljebb $\pi\left(r+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$.

Másrészt a D tartomány tartalmazza a $K\left(r-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ körlapot. Valóban, legyen a P pont távolsága az origótól legfeljebb $r-\frac{\sqrt{2}}{2}$ és legyen U a P-hez legközelebbi (egyik) rácspont. Ekkor könnyen láthatóan P és U távolsága legfeljebb $\frac{\sqrt{2}}{2}$, így U $K(r)$-ben fekszik, valamint az is látható, hogy P az U köré írt négyzetbe esik, tehát P eleme D-nek. Ebből következik, hogy D területe, $N(r)$ legalább $\pi\left(r-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$.

Ezzel beláttuk, hogy

$$\pi r^2-\pi r\sqrt{2}+\frac{\pi}{2}=\pi\left(r-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \leqq N(r) \leqq \pi\left(r+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\pi r^2+\pi r\sqrt{2}+\frac{\pi}{2}.$$

Mármost könnyű ellenőrizni, hogy $r \geqq 3$ esetén $\pi r\sqrt{2}+\frac{\pi}{2}<5r$, amiből a tétel azonnal következik.

Jelöljük $N(r)$-nek πr^2-től való eltérését $h(r)$-rel:

$$h(r)=\left|N(r)-\pi r^2\right|.$$

Ekkor a fenti Gauss-tétel úgy is megfogalmazható, hogy $r \geqq 3$ esetén $h(r)<5r$. Ezt a becslést Gauss után sokan élesítették. *W. Sierpinski* 1906-ban megmutatta, hogy alkalmas C konstanssal $h(r)<Cr^{2/3}$ is igaz minden $r \geqq 1$-re. Később az $r^{2/3}$ hatvány kitevőjét sikerült tovább csökkenteni. A másik irányban *G. H. Hardy* bebizonyította, hogy $h(r)>r^{1/2}$ teljesülhet akármilyen nagy r-ekre. $h(r)$ pontos nagyságrendje ma sem ismert. Legújabban *Alexander Iliének* *G. Kolesnik* módszereit felhasználva sikerült bebizonyítania, hogy minden pozitív c-re $h(r)<r^{35/54+c}$ teljesül, ha r elég nagy.

Most rátérünk az $N(r)$-et megadó pontos formula bizonyítására. Ehhez szükségünk lesz a következő számelméleti tételre: *tetszőleges n pozitív egész számra az $x^2+y^2=n$ egyenlet egész megoldásainak száma $4\big(d_1(n)-d_3(n)\big)$, ahol $d_1(n)$, illetve $d_3(n)$ jelöli az n szám $4k+1$, illetve $4k+3$ alakú pozitív osztóinak számát.* Így például $(\pm1)^2+(\pm1)^2=2$, tehát $x^2+y^2=2$-nek négy megoldása van (az előjeleket négyféleképpen választhatjuk meg). Ennek megfelelően $d_1(2)=1$ (2-nek 1 az egyetlen $4k+1$ alakú osztója), $d_3(2)=0$ és $4=4(1-0)$. Egy másik példa: $x^2+y^2=25$ összes megoldása $(\pm5)^2+0^2$, $0^2+(\pm5)^2$, $(\pm3)^2+(\pm4)^2$, $(\pm4)^2+(\pm3)^2$, tehát a megoldások száma 12. Másrészt $d_1(25)=3$, $d_3(25)=0$ és $12=4(3-0)$.

Ezek után lássuk az $N(r)$-re vonatkozó formulát.

2. Tétel. Minden $r \geqq 0$-ra

$$N(r)=1+4\left([r^2]-\left[\frac{r^2}{3}\right]+\left[\frac{r^2}{5}\right]-\ldots\right.$$

(Itt $[x]$ jelöli x egész részét. A jobb oldali zárójelben csak véges sok tag van; az utolsó tag $\pm\left[\frac{r^2}{k}\right]$, ahol k a legnagyobb páratlan egész szám, amely nem nagyobb r^2-nél.)

Bizonyítás. Legyen (x,y) egy $K(r)$-be eső rácspont. Ekkor $n=x^2+y^2$ nem negatív egész, amelyre $n\leqq r^2$, tehát n csak a $0,1,\dots,[r^2]$ számok valamelyike lehet. Ha n a fenti számok valamelyike, de $n>0$, akkor annyi rácspontra fog teljesülni $x^2+y^2=n$, ahány egész megoldása van az $x^2+y^2=n$ egyenletnek, tehát a fent idézett tétel szerint $4\big(d_1(n)-d_3(n)\big)$. Így $N(r)$-et úgy számíthatjuk ki, hogy $4\big(d_1(n)-d_3(n)\big)$-nek $n=1,2,\dots,[r^2]$-hez tartozó értékeit összeadjuk, majd az összeghez 1-et adunk (mert az $n=0$ értékhez tartozó origót még nem számoltuk).

Képzeljünk most el egy táblázatot, amelyben felsoroljuk az $n=1,2,\dots,[r^2]$ számok mindegyikének összes $4k+1$ alakú osztóját. Ebben a táblázatban $d_1(1)+d_1(2)+\dots,+d_1\big([r^2]\big)$ darab szám fog szerepelni. A táblázatban az 1, 5, 9, 13, ... sorozatnak azok az elemei vannak felsorolva (esetleg többször is), amelyek osztói valamely, r^2-nél nem nagyobb természetes számnak. Az 1 minden n-re szerepelni fog, tehát a táblázat $[r^2]$ darab 1-est tartalmaz. Az 5 annyiszor szerepel, ahány 5-tel osztható szám van r^2-ig. Az 5-tel osztható számok között $\left[\frac{r^2}{5}\right]\cdot 5$ a legnagyobb, ami számításba jön, hiszen $\left(\left[\frac{r^2}{5}\right]+1\right)\cdot 5>\frac{r^2}{5}5=r^2$. Így az 5-ösök száma $\left[\frac{r^2}{5}\right]$. Ugyanígy, a táblázatban annyi 9-es szerepel, ahány 9-cel osztható szám van r^2-ig, ezek száma pedig $\left[\frac{r^2}{9}\right]$. Végül is azt kapjuk, hogy a táblázatban felsorolt számok száma, $S_1=d_1(1)+\dots+d_1\big([r^2]\big)$ megegyezik az

$$\left[\frac{r^2}{1}\right]+\left[\frac{r^2}{5}\right]+\left[\frac{r^2}{9}\right]+\dots$$

összeggel. (Persze ez az összeg csak véges sok tagból áll, az utolsó tag $\left[\frac{r^2}{m}\right]$, ahol m a legnagyobb $4k+1$ alakú szám r^2-ig.) Ugyanígy láthatjuk be, hogy

$$S_2=d_3(1)+d_3(2)+\dots+d_3\big([r^2]\big)=\left[\frac{r^2}{3}\right]+\left[\frac{r^2}{7}\right]+\left[\frac{r^2}{11}\right]+\dots$$

Összefoglalva az eddigieket,

$$\begin{aligned}N(r)&=1+4\big(d_1(1)-d_3(1)\big)+4\big(d_1(2)-d_3(2)\big)+\dots+4\Big(d_1\big([r^2]\big)-d_3\big([r^2]\big)\Big)=\\&=1+4(S_1-S_2)=1+4\left([r^2]-\left[\frac{r^2}{3}\right]+\left[\frac{r^2}{5}\right]-\left[\frac{r^2}{7}\right]+\dots\right),\end{aligned}$$

amivel a tételt bebizonyítottuk.

Amint a bevezetőben már említettük, az előző tételek segítségével meghatározhatjuk az $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\dots$ végtelen sor összegét. Legyen $r>1$ páratlan egész szám. Jelöljük S-sel az $[r^2]-\left[\frac{r^2}{3}\right]+\left[\frac{r^2}{5}\right]-\dots+\left[\frac{r^2}{r^2}\right]$ összeget, és legyen $S'=[r^2]-\left[\frac{r^2}{3}\right]+\dots\pm\left[\frac{r^2}{r}\right]$ (itt az utolsó tag előjele + vagy − aszerint, hogy r 1-et vagy 3-at ad maradékul 4-gyel osztva). Megmutatjuk, hogy $S-r<S'<S+r$.

Tegyük fel, hogy r $4k+1$ alakú. Az S összegben minden tag abszolút értéke legfeljebb annyi, mint az előzőé. Ha S-ben az $\left[\frac{r^2}{r}\right]$ utáni tagokat kettesével zárójelezzük, akkor tehát minden zárójel értéke nem-pozitív és így $S\leqq S'$. Ha most S-ben a $-\left[\frac{r^2}{r+2}\right]$ utáni tagokat zárójelezzük párosával (az utolsó, $\left[\frac{r^2}{r^2}\right]=1$ tag maradjon pár nélkül), akkor a zárójelek értéke nem-negatív lesz, tehát $S\geqq S'-\left[\frac{r^2}{r+2}\right]>S'-r$. Ezzel beláttuk, hogy $r=4k+1$ esetén $S<S'<S+r$. Ugyanígy, $r=4k+3$ esetén $S-r<S'\leqq S$, tehát $S-r\leqq S'<S+r$ mindig teljesül.

Ha elhagyjuk S'-ben az egészrész-jeleket, akkor az

$$S''=r^2-\frac{r^2}{3}+\frac{r^2}{5}-\dots\pm\frac{r^2}{r}=r^2\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\dots\pm\frac{1}{r}\right)$$

összeget kapjuk. S' és S'' eltérése legfeljebb annyi lehet, ahány tagból áll S' (hiszen egy egészrész-jel elhagyásakor 1-nél kisebb hibát követünk el), ezért $S'-r<S''<S'+r$. Végül is azt kapjuk, hogy $S''<S'+r<S+2r$, és hasonlóan, $S''>S-2r$.

Az 1. és 2. tétel állítása szerint

$$\pi r^2-5r<N(r)=1+4S<\pi r^2+5r$$

(feltettük, hogy $r \geqq 3$), amiből

$$\frac{\pi}{4} r^2 - 2r < \frac{\pi}{4} r^2 - \frac{5}{4} r - \frac{1}{4} < S < \frac{\pi}{4} r^2 + \frac{5}{4} r < \frac{\pi}{4} r^2 + 2r.$$

Így az előző becslést felhasználva

$$\frac{\pi}{4} r^2 - 4r < S - 2r < S'' = r^2 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots \pm \frac{1}{r}\right) < S + 2r < \frac{\pi}{4} r^2 + 4r,$$

tehát r^2-tel való osztás után

$$\frac{\pi}{4} - \frac{4}{r} < 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots \pm \frac{1}{r} < \frac{\pi}{4} + \frac{4}{r}.$$

Ebből az egyenlőtlenségből a Leibniz-tétel már azonnal következik. Egy végtelen sor összegén azt a számot értjük, ahová a sor részletösszegei konvergálnak. Így az az állítás, hogy

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots = \frac{\pi}{4},$$

azt jelenti, hogy az $a_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots \pm \frac{1}{2n-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sorozat határértéke $\frac{\pi}{4}$. Az imént levezetett egyenlőtlenség szerint $\left| a_n - \frac{\pi}{4} \right| < \frac{4}{2n-1} \leqq \frac{4}{n}$ minden $n = 1, 2, \ldots$-re. Így bármely pozitív ε számra $\left| a_n - \frac{\pi}{4} \right| < \varepsilon$ ha, $\frac{4}{n} < \varepsilon$, azaz ha $n > \frac{4}{\varepsilon}$. Ez a konvergencia definíciója szerint éppen azt jelenti, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\pi}{4}$, amivel Leibniz tételét bebizonyítottuk.