Az alábbiakban az origó középpontú körlapok által tartalmazott rácspontok számáról lesz szó. Erre először egy közelítő formulát adunk (1. tétel), majd egy pontos képletet (2. tétel). A kettő egybevetéséből szép bizonyítást nyerünk *Leibniz* egy tételére, amely szerint

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots=\frac{\pi}{4}.$$

Rácspontoknak a sík azon pontjait nevezzük, amelyek mindkét koordinátája egész szám. Az origó középpontú, $r$ sugarú körlapot $K(r)$-rel jelöljük; a $K(r)$ körlapba eső rácspontok száma legyen $N(r)$. Lássuk először a közelítő formulát; ez *Gauss*tól származik.

**1. Tétel.** *$r \geqq 3$ esetén $\pi r^2-5r<N(r)<\pi r^2+5r$.*

**Bizonyítás.** A $K(r)$ körlap minden rácspontja köré írjunk egységnyi oldalhosszúságú és a tengelyekkel párhuzamos oldalú négyzetet, amelynek a középpontja a kiszemelt rácspont. Az így kapott négyzetek egyrétűen lefednek egy $D$ tartományt, amelynek a területe nyilván megegyezik a $K(r)$-be eső rácspontok számával, azaz $N(r)$-rel. $D$ bármely pontjának az origótól vett távolsága legfeljebb $r+\frac{\sqrt{2}}{2}$, hiszen ha a $P$ pont az $U$ rácspont köré írt négyzetben van, akkor $P$ és $U$ távolsága legfeljebb $\frac{\sqrt{2}}{2}$, és $U$ távolsága az origótól legfeljebb $r$. Így a $K\left(r+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ körlap lefedi $D$-t, tehát $D$ területe, $N(r)$ legfeljebb $\pi\left(r+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$.

Másrészt a $D$ tartomány tartalmazza a $K\left(r-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ körlapot. Valóban, legyen a $P$ pont távolsága az origótól legfeljebb $r-\frac{\sqrt{2}}{2}$ és legyen $U$ a $P$-hez legközelebbi (egyik) rácspont. Ekkor könnyen láthatóan $P$ és $U$ távolsága legfeljebb $\frac{\sqrt{2}}{2}$, így $U$ $K(r)$-ben fekszik, valamint az is látható, hogy $P$ az $U$ köré írt négyzetbe esik, tehát $P$ eleme $D$-nek. Ebből következik, hogy $D$ területe, $N(r)$ legalább $\pi\left(r-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$.

Ezzel beláttuk, hogy

$$\pi r^2-\pi r\sqrt{2}+\frac{\pi}{2}=\pi\left(r-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\leqq N(r)\leqq\pi\left(r+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\pi r^2+\pi r\sqrt{2}+\frac{\pi}{2}.$$

Mármost könnyű ellenőrizni, hogy $r\geqq 3$ esetén $\pi r\sqrt{2}+\frac{\pi}{2}<5r$, amiből a tétel azonnal következik.

Jelöljük $N(r)$-nek $\pi r^2$-től való eltérését $h(r)$-rel:

$$h(r)=\left|N(r)-\pi r^2\right|.$$

Ekkor a fenti Gauss-tétel úgy is megfogalmazható, hogy $r\geqq 3$ esetén $h(r)<5r$. Ezt a becslést Gauss után sokan élesítették. *W. Sierpinski* 1906-ban megmutatta, hogy alkalmas $C$ konstanssal $h(r)<Cr^{2/3}$ is igaz minden $r\geqq 1$-re. Később az $r^{2/3}$ hatvány kitevőjét sikerült tovább csökkenteni. A másik irányban *G. H. Hardy* bebizonyította, hogy $h(r)>r^{1/2}$ teljesülhet akármilyen nagy $r$-ekre. $h(r)$ pontos nagyságrendje ma sem ismert. Legújabban *Alexander Ilié*nek *G. Kolesnik* módszereit felhasználva sikerült bebizonyítania, hogy minden pozitív $c$-re $h(r)<r^{35/54+c}$ teljesül, ha $r$ elég nagy.

Most rátérünk az $N(r)$-et megadó pontos formula bizonyítására. Ehhez szükségünk lesz a következő számelméleti tételre: *tetszőleges $n$ pozitív egész számra az $x^2+y^2=n$ egyenlet egész megoldásainak száma $4\big(d_1(n)-d_3(n)\big)$, ahol $d_1(n)$, illetve $d_3(n)$ jelöli az $n$ szám $4k+1$, illetve $4k+3$ alakú pozitív osztóinak számát.* Így például $(\pm1)^2+(\pm1)^2=2$, tehát $x^2+y^2=2$-nek négy megoldása van (az előjeleket négyféleképpen választhatjuk meg). Ennek megfelelően $d_1(2)=1$ (2-nek 1 az egyetlen $4k+1$ alakú osztója), $d_3(2)=0$ és $4=4(1-0)$. Egy másik példa: $x^2+y^2=25$ összes megoldása $(\pm5)^2+0^2$, $0^2+(\pm5)^2$, $(\pm3)^2+(\pm4)^2$, $(\pm4)^2+(\pm3)^2$, tehát a megoldások száma 12. Másrészt $d_1(25)=3$, $d_3(25)=0$ és $12=4(3-0)$.

Ezek után lássuk az $N(r)$-re vonatkozó formulát.

**2. Tétel.** Minden $r\geqq 0$-ra

$$N(r)=1+4\left([r^2]-\left[\frac{r^2}{3}\right]+\left[\frac{r^2}{5}\right]-\ldots\right.$$

(Itt $[x]$ jelöli $x$ egész részét. A jobb oldali zárójelben csak véges sok tag van; az utolsó tag $\pm\left[\frac{r^2}{k}\right]$, ahol $k$ a legnagyobb páratlan egész szám, amely nem nagyobb $r^2$-nél.)

**Bizonyítás.** Legyen $(x, y)$ egy $K(r)$-be eső rácspont. Ekkor $n = x^2 + y^2$ nem negatív egész, amelyre $n \leqq r^2$, tehát $n$ csak a $0, 1, \ldots, [r^2]$ számok valamelyike lehet. Ha $n$ a fenti számok valamelyike, de $n > 0$, akkor annyi rácspontra fog teljesülni $x^2 + y^2 = n$, ahány egész megoldása van az $x^2 + y^2 = n$ egyenletnek, tehát a fent idézett tétel szerint $4\big(d_1(n) - d_3(n)\big)$. Így $N(r)$-et úgy számíthatjuk ki, hogy $4\big(d_1(n) - d_3(n)\big)$-nek $n = 1, 2, \ldots, [r^2]$-hez tartozó értékeit összeadjuk, majd az összeghez 1-et adunk (mert az $n = 0$ értékhez tartozó origót még nem számoltuk).

Képzeljünk most el egy táblázatot, amelyben felsoroljuk az $n = 1, 2, \ldots, [r^2]$ számok mindegyikének összes $4k + 1$ alakú osztóját. Ebben a táblázatban $d_1(1) + d_1(2) + \ldots, +d_1\big([r^2]\big)$ darab szám fog szerepelni. A táblázatban az 1, 5, 9, 13, ... sorozatnak azok az elemei vannak felsorolva (esetleg többször is), amelyek osztói valamely, $r^2$-nél nem nagyobb természetes számnak. Az 1 minden $n$-re szerepelni fog, tehát a táblázat $[r^2]$ darab 1-est tartalmaz. Az 5 annyiszor szerepel, ahány 5-tel osztható szám van $r^2$-ig. Az 5-tel osztható számok között $\left[\frac{r^2}{5}\right] \cdot 5$ a legnagyobb, ami számításba jön, hiszen $\left(\left[\frac{r^2}{5}\right] + 1\right) \cdot 5 > \frac{r^2}{5} 5 = r^2$. Így az 5-ösök száma $\left[\frac{r^2}{5}\right]$. Ugyanígy, a táblázatban annyi 9-es szerepel, ahány 9-cel osztható szám van $r^2$-ig, ezek száma pedig $\left[\frac{r^2}{9}\right]$. Végül is azt kapjuk, hogy a táblázatban felsorolt számok száma, $S_1 = d_1(1) + \ldots + d_1\big([r^2]\big)$ megegyezik az

$$\left[\frac{r^2}{1}\right] + \left[\frac{r^2}{5}\right] + \left[\frac{r^2}{9}\right] + \ldots$$

összeggel. (Persze ez az összeg csak véges sok tagból áll, az utolsó tag $\left[\frac{r^2}{m}\right]$, ahol $m$ a legnagyobb $4k + 1$ alakú szám $r^2$-ig.) Ugyanígy láthatjuk be, hogy

$$S_2 = d_3(1) + d_3(2) + \ldots + d_3\big([r^2]\big) = \left[\frac{r^2}{3}\right] + \left[\frac{r^2}{7}\right] + \left[\frac{r^2}{11}\right] + \ldots$$

Összefoglalva az eddigieket,

$$N(r) = 1 + 4\big(d_1(1) - d_3(1)\big) + 4\big(d_1(2) - d_3(2)\big) + \ldots + 4\Big(d_1\big([r^2]\big) - d_3\big([r^2]\big)\Big) =$$
$$= 1 + 4(S_1 - S_2) = 1 + 4\left([r^2] - \left[\frac{r^2}{3}\right] + \left[\frac{r^2}{5}\right] - \left[\frac{r^2}{7}\right] + \ldots\right),$$

amivel a tételt bebizonyítottuk.

Amint a bevezetőben már említettük, az előző tételek segítségével meghatározhatjuk az $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots$ végtelen sor összegét. Legyen $r > 1$ páratlan egész szám. Jelöljük $S$-sel az $[r^2] - \left[\frac{r^2}{3}\right] + \left[\frac{r^2}{5}\right] - \ldots + \left[\frac{r^2}{r^2}\right]$ összeget, és legyen $S' = [r^2] - \left[\frac{r^2}{3}\right] + \ldots \pm \left[\frac{r^2}{r}\right]$ (itt az utolsó tag előjele + vagy − aszerint, hogy $r$ 1-et vagy 3-at ad maradékul 4-gyel osztva). Megmutatjuk, hogy $S - r < S' < S + r$.

Tegyük fel, hogy $r$ $4k + 1$ alakú. Az $S$ összegben minden tag abszolút értéke legfeljebb annyi, mint az előzőé. Ha $S$-ben az $\left[\frac{r^2}{r}\right]$ utáni tagokat kettesével zárójelezzük, akkor tehát minden zárójel értéke nem-pozitív és így $S \leqq S'$. Ha most $S$-ben a $-\left[\frac{r^2}{r+2}\right]$ utáni tagokat zárójelezzük párosával (az utolsó, $\left[\frac{r^2}{r^2}\right] = 1$ tag maradjon pár nélkül), akkor a zárójelek értéke nem-negatív lesz, tehát $S \geqq S' - \left[\frac{r^2}{r+2}\right] > S' - r$. Ezzel beláttuk, hogy $r = 4k + 1$ esetén $S < S' < S + r$. Ugyanígy, $r = 4k + 3$ esetén $S - r < S' \leqq S$, tehát $S - r \leqq S' < S + r$ mindig teljesül.

Ha elhagyjuk $S'$-ben az egészrész-jeleket, akkor az

$$S'' = r^2 - \frac{r^2}{3} + \frac{r^2}{5} - \ldots \pm \frac{r^2}{r} = r^2\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots \pm \frac{1}{r}\right)$$

összeget kapjuk. $S'$ és $S''$ eltérése legfeljebb annyi lehet, ahány tagból áll $S'$ (hiszen egy egészrész-jel elhagyásakor 1-nél kisebb hibát követünk el), ezért $S' - r < S'' < S' + r$. Végül is azt kapjuk, hogy $S'' < S' + r < S + 2r$, és hasonlóan, $S'' > S - 2r$.

Az 1. és 2. tétel állítása szerint

$$\pi r^2 - 5r < N(r) = 1 + 4S < \pi r^2 + 5r$$

(feltettük, hogy $r \geqq 3$ ), amiből

$$\frac{\pi}{4}r^2 - 2r < \frac{\pi}{4}r^2 - \frac{5}{4}r - \frac{1}{4} < S < \frac{\pi}{4}r^2 + \frac{5}{4}r < \frac{\pi}{4}r^2 + 2r.$$

Így az előző becslést felhasználva

$$\frac{\pi}{4}r^2 - 4r < S - 2r < S'' = r^2\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots \pm \frac{1}{r}\right) < S + 2r < \frac{\pi}{4}r^2 + 4r,$$

tehát $r^2$-tel való osztás után

$$\frac{\pi}{4} - \frac{4}{r} < 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots \pm \frac{1}{r} < \frac{\pi}{4} + \frac{4}{r}.$$

Ebből az egyenlőtlenségből a Leibniz-tétel már azonnal következik. Egy végtelen sor összegén azt a számot értjük, ahová a sor részletösszegei konvergálnak. Így az az állítás, hogy

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots = \frac{\pi}{4},$$

azt jelenti, hogy az $a_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots \pm \frac{1}{2n-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sorozat határértéke $\frac{\pi}{4}$. Az imént levezetett egyenlőtlenség szerint $\left| a_n - \frac{\pi}{4} \right| < \frac{4}{2n-1} \leqq \frac{4}{n}$ minden $n = 1, 2, \ldots$-re. Így bármely pozitív $\varepsilon$ számra $\left| a_n - \frac{\pi}{4} \right| < \varepsilon$ ha, $\frac{4}{n} < \varepsilon$, azaz ha $n > \frac{4}{\varepsilon}$. Ez a konvergencia definíciója szerint éppen azt jelenti, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{\pi}{4}$, amivel Leibniz tételét bebizonyítottuk.