

Havonta egy-egy, számomra valamilyen oknál fogva kedves feladatot mondok el. Ezek megoldása, noha a középiskolában oktatott ismeretanyagnál többet nem kíván, mégis mély, igazi matematikusi gondolkodást igényel. A problémákra a megjelenést követő számban megoldást adok, azonban nem kívánok egyetlen problémát sem teljesen lezárni. Akár a feladatokkal, akár azok megoldásával kapcsolatban minden megjegyzést örömmel veszek.

Csirmaz László

*

Mutassuk meg, hogy az első 64 pozitív egészéből nem lehet olyan $4 \times 4 \times 4$ -es, hagyományos értelemben vett bűvös kockát előállítani, melyben az egy egyenesre eső 4-4 szám összege (beleértve a testátlókat is) ugyanannyi legyen.

* * *

Tetszőleges x valós számra $[x]$ jelöli x egész részét, vagyis a legnagyobb olyan egészt, mely még nem nagyobb x -nél. Minden $t \geq 2$ természetes számra legyen

$$(1) \quad f(t) = \left[\frac{1}{\sum_{i=1}^{t-1} \left[\frac{1}{1+t-i \cdot [t/i]} \right]} \right],$$

továbbá ha $n \geq 1$ egész, akkor

$$(2) \quad g(n) = 1 + 2^{2n} - \sum_{i=2}^{2^{2n}} \left[\frac{1}{1 + \left[\frac{n-1}{\sum_{j=2}^i f(j)} \right]} \right].$$

Mármost a kérdés az: mit számít ki ez „képlettel definiált” $g(n)$ függvény?

Ha $t \geq 2$ és $1 \leq i < t$ természetes számok, akkor $t - i \cdot [t/i]$ értéke éppen t -nek i -vel való osztásakor kapott maradék. Így

$$(3) \quad \frac{1}{1 + t - i \cdot [t/i]}$$

értéke 1, ha i osztója t -nek, különben pedig 1-nél kisebb pozitív szám, hiszen ekkor a nevező 1-nél nagyobb. Ezért (3) egész része vagy 1 vagy 0, attól függően, hogy i osztója-e t -nek vagy sem. Tehát a

$$\sum_{t=1}^{t-1} \left[\frac{1}{1 + t - i \cdot [t/i]} \right]$$

kifejezés megadja t azon d osztóinak számát, amikre $1 \leq d \leq t-1$. Ez a szám csak akkor 1, ha t prímszám (hiszen legalább egy osztója, ti. az 1, minden számnak van), egyébként értéke legalább 2. Ez pedig azt jelenti, hogy $f(t)$ értéke akkor 1, ha t prímszám, és 0, ha t összetett.

Ezek után térjünk át a $g(n)$ -et definiáló (2) formulára. Mivel $f(i) = 1$, ha i prím, és $f(i) = 0$ egyébként, azért $\sum_{j=2}^i f(j) > n-1$ pontosan akkor áll fenn, ha i legalább akkora, mint az n -edik prímszám, amit jelöljünk p_n -nel. (Így például $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5$ stb.). Más szavakkal

$$\left[\frac{1}{1 + \left[\frac{n-1}{\sum_{j=2}^i f(j)} \right]} \right] = \begin{cases} 0, & \text{ha } i < p_n \\ 1, & \text{ha } i \geq p_n. \end{cases}$$

Most fogadjuk el egy pillanatra, hogy az n -edik prímszám kisebb 2^{2n} -nél, akkor

$$\sum_{i=2}^{2^{2n}} \left[\frac{1}{1 + \left[\frac{n-1}{\sum_{j=2}^i f(j)} \right]} \right] = 2^{2n} - (p_n - 1),$$

hiszen $i = p_n$ -től $i = 2^{2n}$ -ig csupa egyest kellett összeadnunk. Ennek alapján $g(n) = p_n$, az n -edik prímszám. Levonhatjuk a tanulságot: igenis van olyan „képlet”, ami az n -edik prímszámot definiálja, bár ennek alapján az n -edik prím kiszámítása sokkal több munkát igényel, mintha azt a „hagyományos módon” keresnénk meg.

Annak igazolására, hogy az n -edik prímszám 2^{2n} -nél kisebb, tekintsük az alábbi n darab számot:

$$(4) \quad 2, 2 + 1, 2^2 + 1, 2^4 + 1, \dots, 2^{2^{n-1}} + 1.$$

Ha megmutatjuk, hogy ezek közül semelyik kettőnek nem lehet közös prímtenyezője, készen vagyunk: a (4) alatti n darab szám mindegyike kisebb 2^{2^n} -nél, s mindegyiknek van az összes többi prímosztóitól különböző prímosztója. Így 2^{2^n} előtt legalább n prímszám van, vagyis az n -edik prím kisebb 2^{2^n} -nél.

Az viszont, hogy a (4) alatti számok páronként relatív prímek, egyszerűen következik abból, hogy az első kivételével az összes többi páratlan, továbbá az $a^2 - 1 = (a + 1)(a - 1)$ összefüggés i -szeri alkalmazásával

$$2^{2^i} - 1 = (2^{2^{i-1}} + 1)(2^{2^{i-2}} + 1) \dots (2^4 + 1)(2^2 + 1)(2 + 1)(2 - 1).$$

Így $j < i$ esetén $2^{2^j} + 1$ összes prímosztója osztója $(2^{2^i} - 1)$ -nek is, vagyis nem lehet osztója $(2^{2^1} + 1)$ -nek.

Nem nehéz belátni azt sem, hogy az n -edik prím még 2^n -nél is kisebb, tehát (2)-ben $2^{2^n} - t$ mindkét helyen 2^n -re cserélhetnénk.